



ПИСЬМА — МЫЛОМ

Анатолий Вайнштейн (Париж) — Александр Зенкин (Москва)
anatole.vainshtein@wanadoo.fr — alexzen@com2com.ru

А. В. — 12 мая 2003, 2:11 АМ.

Уважаемый Александр! Я хорошо понимаю, что некорректность формулировок и наивность вопросов может Вас покорибить как профессионала. Но на снисхождение и не рассчитываю. Единственно, что хотелось бы — буквально в двух словах получить ответ на эти вопросы. Просто: Ваше мнение. Понимаю, что отрываю от более насущных дел. Но, признаться, если бы друзья по Суздалью не ободрили меня, вряд ли бы я посягнул на Ваше время. Никакой срочности, разумеется, нет.

На «Теорию множеств» вынесло меня когда-то в связи с темой иррационального и бесконечного в искусстве. Занимаясь в основном временными формами искусства, я нашел много примеров того, как на самом даже примитивном уровне бесконечность обнаруживает свое присутствие и актуально проявляет себя на некоем мета-уровне, где искусство и математика, похоже, еще находятся в состоянии безгрешного, райски-неразделенного единства. Возможно, я, что называется, «обознался», но тема по-прежнему увлекает. В Суздале в своем докладе я пытался, насколько мог, изложить свою точку зрения, хотя понимаю, что забрел слишком далеко, в область совершенно чужую. Но в меру моего музыкального и технического образования, опыта работы на телевидении (в тех профессиях, когда приходилось соединять четкую алгоритмику со сложными творческими задачами) я пытаюсь осмыслить проблемы, которые неизбежно задевают фундаментальные области. Буду очень Вам признателен за профессиональный комментарий к моим вопросам, что, я надеюсь, поможет мне точнее сориентироваться в сфере этих проблем. Спасибо.

С уважением, Анатолий.

(Нумерация вопросов совершенно произвольная.)

1) Является ли противоречие в понятии *актуальной бесконечности* категорическим «запретом» на него, и если нет, то может ли оно принадлежать к роду таких же самоочевидных (априорных) категорий, как (по Пеано) *натуральное число, следование, начальный член ряда* или *аксиома полной индукции* — по сути, той же актуализированной бесконечности, в которой, например Пуанкаре видел образец априорного синтетического суждения?

2) Не влечет ли с неизбежностью понятие точки и числовой оси так же и понятие об *актуальной бесконечности*, поскольку ведь числовая ось есть своего рода сумма несчетного множества всех точек?

3) Не является ли понятие *конечного* («алгоритмически тождественное» *актуальному*, как Вы говорите) неотъемлемым коррелятом, диалектической парой к понятию *бесконечное* (как в парах предельных категорий: *движение — покой, множество — единство*)? Если да, то тогда они равноправно проецируются друг в друга: *конечное в бесконечном* и в самом деле представляет собой бесконечность потенциальную (в Аристотелевском смысле), но *бесконечное в конечном* — *актуальную бесконечность*, что реально соответствует числовой оси, то есть континууму точек, распределенных на конечном отрезке. Или это чистая схоластика?

4) Если представить себе, что мы не наращиваем элементы один за другим, а делим некое *целое* (*монаду*) на части, то тогда, понятно, мы запускаем потенциально бесконечный процесс. Но чем тогда будет для нас само делимое целое? — тем, очевидно, что уже актуально содержит в себе всю бесконечную по мощности сумму частей? Не это ли свойство вкладывалось древними в понятие *целого*, *организма* или *монады*? Почему-то всегда, когда происходит деление целого, сразу с очевидностью понимаешь, что оно неисчерпаемо — актуально заряжено бесконечностью.

5) Или: если на числовой оси одну за другой обозначать все точки, соответствующие целым числам, тогда то, что «остаётся» необозначенным, не есть ли актуально бесконечное множество точек? Другими словами, если из действительных чисел (R) вычесть натуральные (N) или рациональные (Q), то какое множество «останется» — бесконечное? А если так, то тогда оно вполне актуально существует?

6) Может ли зримый образ «достигнутого» (в бесконечности) предела — к примеру, предела ряда Фибоначчи, точки золотого сечения — возбудить в нас некое внутреннее знание, которое можно было бы назвать чувством актуальной бесконечности? И если да, что это: «рефлекс» или «инстинкт», то есть является его источником наблюдения за свойствами вещей или некие «исчисления души»?

7) Возможно ли, что знание (императив) *актуальной бесконечности* исходит от «правополушарной» сферы нашей деятельности, и где-то там же — в искусстве, к примеру, — оно «непротиворечиво» реализует себя в полной мере, составляя при этом для левополушарного, логико-дедуктивного осмысления неразрешимую проблему (антиномию)?

8) Совместима ли актуальная бесконечность с симметрией? Только в самоподобии, фрактале — но ведь это дискретный мир? А можно ли сказать, что симметрия совместима с актуальной бесконечностью только на ее границе, только там, где «пределы» бесконечного множества континуальной мощности, то есть как начало (ноль) и конец (единица) числовой оси?

9) Не является ли парадоксом то, что мы сравнительно легко можем представить *актуальное* множество предельной — континуальной — мощности («все» действительные числа) в виде той же числовой оси, но совершенно не в состоянии найти конструктивную интерпретацию актуально-бесконечного натурального ряда, хотя, казалось бы, он как дискретное множество по мощности «много слабее», «проще»? Мы можем только смоделировать натуральный ряд с помощью некой операции перечисления (или итерации). Но тогда получается, что актуально-бесконечное нам доступнее, чем потенциально-бесконечное, и даже, может быть, «первичнее» его и является необходимым *начальным условием* для понятия потенциальной бесконечности? Короче, дискретное бесконечное множество мы можем мыслить актуальным только «на фоне» континуального множества как его подмножество, тогда как само по себе — только потенциальным. Тогда актуально-бесконечное не есть некая индуктивная «натяжка» потенциально-неограниченного пересчета, а наоборот — оно вполне независимо от конечного процесса (итерации) и как всякое актуальное предшествует дискретно-потенциальному (о котором, кажется, больше и споров). Вам покажется это нелепым?

10) И совсем уж для курьеза, просто любопытно вдруг стало: что можно ответить на вопрос о том, «поровну» ли четных и нечетных чисел в натуральном ряду?

С уважением, Анатолий.

А. З. — 21 мая 2003, 19.12.

Дорогой Анатолий! Ваши вопросы затрагивают самые глубокие вопросы оснований математики и философии бесконечного. Не хотелось «комкать» ответы, поэтому отвечаю со сдвигом во времени, по мере возможностей, коих «борьба за существование» в современных российских условиях оставляет не слишком много. Еще раз перечитал Вашу замечательную — как по форме, так и по содержанию, — статью в прошлом Суздальском сборнике «Игра: преодоление симметрии». Получил огромное удовольствие. Спасибо!

Теперь — о Ваших вопросах. Мои основные постулаты, относящиеся к делу:

1. Основными идеями, понятиями, концепциями философии бесконечного (по Аристотелю) являются: дискретное (бесконечное по возрастанию) и непрерывное (бесконечное по убыванию).

В математике адекватной моделью «дискретного» является ряд натуральных чисел: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ (*); адекватной моделью «непрерывного» является бесконечный процесс дихотомии отрезка $[0,1]$ и — как результат этой дихотомии — множество $X=[0,1]$ точек или действительных чисел этого отрезка, т. е. континуум.

Что есть точка? — В самом общем виде это есть бесконечная (для простоты, но без ограничения общности), скажем, двоичная последовательность: если x есть элемент X , то

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots (**)$$

где для любого n $a_n=0$ или $a_n=1$.

Вот теперь возникает фундаментальнейший вопрос оснований математики: является ли бесконечность последовательности (**) потенциальной или актуальной.

До сих пор философы и математики спорят и не могут «договориться» по этому вопросу. Почему? — Потому что считать ли бесконечность (любую) потенциальной или актуальной — это на бытовом и философском («платонизм» — «анти-платонизм») уровне дело вкуса, а на языке логики и математики — это свободный выбор между следующими двумя *контрадикторными аксиомами* (которые, как известно, не доказываются, а либо принимаются, либо отвергаются).

Аксиома Аристотеля. Все бесконечные множества — потенциальны.

Аксиома Кантора. Все бесконечные множества — актуальны.

Здесь имеет место быть полная формальная и семантическая аналогия с Пятым Постулатом Евклида: принимаете Постулат о том, что параллельные не пересекаются, — получаете евклидову геометрию, принимаете *отрицание* этого Постулата — получаете неевклидову геометрию. Поскольку доказано, что последняя непротиворечива, то неевклидова геометрия имеет такое же право на существование в математике, как и евклидова.

Таким образом, *аксиома* Кантора, формально, имеет такое же право на существование, как и *аксиома* Аристотеля. Однако, при одном существенном условии: пока не доказано, что *аксиома Кантора* ведет к противоречию.

И здесь имеет место быть, пользуясь выражением Брауэра, коварный «патологический казус в истории математики, от которого грядущие поколения математиков придут в ужас».

Дело в том, что все современные мета-математики и специалисты в области аксиоматической теории множеств признают (имею богатый опыт общения с мета-математическими корифеями по этому поводу) *очевидный факт*: вся канторовская и современная аксиоматическая теория множеств *основаны* именно на *аксиоме* Кантора, но это «ихнее признание» является чисто кулуарным соглашением, которое нигде не фиксируется в явном виде, т. е. сама *аксиома* Кантора не включается явно ни в одну систему аксиом современной аксиоматической теории множеств.

Это означает, что само понятие актуальной бесконечности (АБ), на котором основано *доказательство* теоремы Кантора о несчетности множества $X=[0,1]$, т. е. континуума, т. е.

доказательство *единственной* теоремы, позволяющей говорить о различении бесконечностей по их «мощности», *алгоритмически* использует свойства АБ, но сами слова «АБ» явно нигде не упоминает, т. е. делает понятие АБ *недоступным* для критики с позиций классической логики. Короче, эту теорему Кантора далеко не самые глупые математики критикуют более 100 лет, существуют сотни ее «опровержений», но ни одно из них не является доказательством с точки зрения логики. Почему? — Потому что краеугольным камнем канторовского доказательства является именно использование свойств АБ, но сами слова «АБ» употреблять непозволительно! Это уже даже не «игра без правил», это прямой обман «грядущих поколений» и, согласно Витгенштейну, «идиотическая работа», которая «не имеет отношения к тому, что в логике принято называть дедукцией».

Единственное мое уточнение этой, скандальной с точки зрения классической логики и математики, ситуации заключается в том, что я просто тайное делаю явным, т. е. впервые явно формулирую *актуальность* множества X и последовательностей (***) как *необходимое условие* канторовского доказательства, и *доказываю* (в обычном логическом и математическом смысле), что в этом случае доказательство Кантора ничего не доказывает, за исключением того *факта*, что понятие АБ является внутренне противоречивым *в рамках канторовского доказательства*. Точнее, я доказываю, что с *алгоритмической* точки зрения (прежде всего, с точки зрения выдачи окончательного результата, т. е. завершения некоторого пошагового процесса), применение алгоритма канторовского Диагонального Метода (КДМ) к *актуально-бесконечному* множеству X ничем не отличается от алгоритма применения операции «+1» к любому *конечному* множеству единиц n .

2. Где в математике нас обманывает интуиция? Одно из наиболее «убийственных доказательств» существования АБ в математике состоит, по Кантору, в следующем. Существенную часть матанализа составляет теория непрерывных функций, заданных на отрезке, скажем, $[0,1]$. Но, говорит Кантор, чтобы понятие непрерывной функции, заданной на отрезке $[0,1]$, было математически определенным, сам отрезок $[0,1]$ должен быть определенным и неизменным, т. е. должен уже содержать *все* свои *точки*, а это значит, что *бесконечное* множество точек отрезка $[0,1]$ не может быть *переменным*, т. е. *потенциальным*. Следовательно, бесконечность множества точек отрезка $[0,1]$ является актуальной.

К сожалению, ни сам Кантор, ни все его последователи, не поняли, что в данном случае вопрос об *актуальности* множества точек отрезка $[0,1]$, т. е. континуума, сводится к вопросу о том, *что* есть сама *точка* этого континуума, т. е. к вопросу о том, является бесконечность последовательности (**), определяющей понятие *точки*, актуальной или потенциальной. Как сказано выше, последний вопрос решается свободным выбором либо *аксиомы Кантора*, — и тогда *все* бесконечности актуальны, но в таком случае ДМК ведет к фатальному для различения бесконечностей по их «мощности» противоречию, либо *аксиомы Аристотеля*, — и тогда мы имеем *современную классическую* математику, которая моделирует—описывает—отражает любые процессы живой и неживой природы без всяких противоречий, но не выходит за рамки потенциальной бесконечности.

3. Что касается «взаимоотношения» науки (математики) и искусства, то я полагаю, что общим здесь является, конечно же, творчество, которое и в науке, и в искусстве реализуется а глубинах подсознания, интуиции и визуального, правополушарного мышления. Я целиком согласен с Вашей версией соотношения континуального и дискретного («структурного»), определяемого игрой, «которую теперь можно трактовать как поиск иррациональности на границах рационального, буквально на границе правил». Конечно, в искусстве эти правила не могут задаваться логикой или математикой, и если, согласно Кантору и Гильберту, «сущность математики заключается в ее свободе», которая, согласно Пуанкаре, «не есть произвол», и пока эта «свобода» не ведет к противоречиям, то можно сказать, что сущность искусства также заключается в полной свободе, пока эта

свобода не ведет к противоречию с эстетикой художественной образности, хотя последняя имеет иррациональную (интуитивную) природу, зависит от множества исторических, социальных, биологических и т. п. факторов.

Поэтому я считаю, что художник имеет право даже математические понятия и концепции использовать достаточно свободно (без оглядки на строгую математику), если того требуют его художественно-эстетические интенции, но это, естественно, не означает, что такие художественные образы возможно использовать для обоснования этих математических понятий и концепций.

Если, например, художник Александр Панкин утверждает, что он с помощью своей художественной визуализации десятичной последовательности числа «пи» «разделил пополам площадь *своего* квадрата», я говорю, «Бога ради», тем более, что для *данного* квадрата это верно, но когда он утверждает, что число «пи» делит пополам площадь *любого* квадрата, я говорю, что это неверно с точки зрения математики. Ну, это так, к слову. — Просто, у нас с ним на эти темы проходит длительная дискуссия.

Теперь постараюсь конкретно ответить на Ваши вопросы (в означенном Вами порядке).

1. Да, противоречивость понятия АБ является категорическим запретом на его употребление в математике, которая, кстати, *вся* (включая сечения Дедекинда, фундаментальные последовательности Коши, теорию пределов Вейерштрасса, весь анализ и т. д.) построена на *аксиоме Аристотеля*.

Как противоречивое понятие АБ не может принадлежать к указанному Вами роду категорий. Пуанкаре категорически утверждал: «Нет АБ; канторианцы забыли об этом и впали в противоречия. Будущие поколения будут рассматривать канторовскую теорию множеств как болезнь, от которой, к счастью, удалось наконец-то избавиться».

2. Понятие точки в форме ее *определения* как последовательности (**) и понятие числовой оси $[-00, +00]$ влекут понятие *бесконечности*, актуальный же или потенциальный характер этой бесконечности определяется выбором аксиом Кантора или Аристотеля, как указано выше. Утверждая, что «числовая ось есть своего рода сумма несчетного множества всех точек», Вы уже неявно признаете именно аксиому Кантора, поскольку без этой аксиомы теорема Кантора о несчетности недоказуема, а без теоремы Кантора понятие несчетности не имеет смысла.

3. Конечное и не-конечное (бесконечное) являются диалектической парой подобно «движение»—«не-движение» (покой), «множественность»—«не-множественность» (единичность) и т. п. Ваша идея о взаимном проецировании «конечного» и «бесконечного» очень привлекательна с художественно-философской точки зрения: согласен, что интерпретацией потенциально-бесконечного ряда (*) конечных натуральных чисел как «проецирование конечного в бесконечном». Однако, с интерпретацией континуума $[0, 1]$ как «проецирование актуально-бесконечного в конечное» мне трудно согласиться.

4. По поводу «наращивания элементов» и деления «целого (монады)». Эти процессы связаны изоморфизмом между процессом построения натурального ряда (*) и процессом дихотомии отрезка $[0, 1]$. Эта связь опять-таки определяется выбором АБ или ПБ (потенциально-бесконечного) характера бесконечности последовательности (**), представляющей точки отрезка $[0, 1]$. Все эти вопросы детально рассмотрены у меня в статье:

A. A. Zenkin, *Cognitive (Semantic) Visualization Of The Continuum Problem And Mirror Symmetric Proofs In The Transfinite Numbers Theory*. — The e-journal «VISUAL MATHEMATICS», Volume 1, No. 2, 1999. at the WEB-Sites:

<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/zen/index.html>

<http://members.tripod.com/vismath1/zen/index.html>

5. Множество $R-(N+Q)$ является АБ, если Вы изначально считаете, что само R есть АБ. Но АБ множества R определяется выбором АБ или ПБ представления (**) каждой его точки. Последнее, в свою очередь, определяется свободным выбором либо аксиомы Кантора, либо аксиомы Аристотеля. При этом всегда нужно помнить, что аксиома Кантора ведет к противоречию.

6. «Достижение» предела бесконечной последовательности равносильно априорной *актуализации* этой последовательности, т. е. неявному выбору аксиомы Кантора. Я думаю, «чувство АБ» не есть ни «рефлекс» (поскольку конечный человек не имеет практического опыта общения с АБ), ни «инстинкт» (поскольку даже в процессе миллионлетней эволюции конечный человек не мог приобрести генетического опыта общения с АБ). Это чувство, как мне кажется, порождается в нашей «душе» уникальным свойством нашего мозга — это свойство я назвал «безинерционностью мультиплицирования мыслимых сущностей» (соответствующая статья будет опубликована в конце года): человеческий мозг способен без труда, без существенных различий в энергетических затратах представить себе 1 яблоко, 2, 3, ... , 10, 100, яблок и т. д. То же относится к представлению атомов, галактик, вселенных и т. п.

Правда, независимо от конкретики мыслимого объекта, после первой сотни их количество существенно «размывается», после первой тысячи — коллапсирует в неопределенное «очень много». Когда же воображение переступает и предел «очень многого», то возникает «чувство», которое мы называем онтологически пустым термином «бесконечное». При этом такое «бесконечное» мы можем мыслить и как АБ (неизменное), и как ПБ (продолжающееся увеличиваться). Но это «чувство бесконечного» является чисто интуитивным и уже не может иметь отношения к математике.

7. Я думаю, что для АБ больше подходит «чувство», а не «знание», и это чувство, действительно, исходит из правополушарной, интуитивной нашей деятельности. В искусстве мы можем «описывать» это чувство так, как это подсказывает нам наша интуиция (в том числе и противоречиво, как это делает Кантор: «ряд 1, 2, 3, ... — бесконечен и не имеет последнего элемента; но как это ни покажется противоречивым, нет ничего нелепого в том, чтобы...» назвать этот потенциально-бесконечный ряд новым *именем*, скажем, «омега», назвать эту «омегу» *целым числом*, а дальше и Кантор не нужен, поскольку начинает работать Пеано: если омега — целое, то омега +1, тоже целое; если омега +1 — целое, то омега +2 тоже целое, и т. д.

Откровенно говоря (на основе моих работ), я не вижу здесь неразрешимых антиномий. — Все здесь разрешимо. Нужно только четко и явно сформулировать то, что стоит за «размытыми» понятиями АБ и ПБ.

Я даю строгие формальные, аксиоматические и даже алгоритмические определения ПБ и АБ.

См. FOM-archive

[FOM] As to strict definitions of potential and actual infinities. *Alexander Zenkin*

<http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2002-December/006121.html>

8. К сожалению, не понял, что Вы имеете в виду, говоря о связи АБ с симметрией.

9. Нет, мне не кажется это нелепым. Когда мы рисуем мелом на доске (якобы) прямую линию, ставим на этой линии две «засечки» 0 и 1 и между ними — точку А, то мы полагаем, что нам задан *как целое* отрезок $[0,1]$, т. е. заданы *все* точки этого отрезка. Здесь наша интуиция, жестко «привязанная» к физиологии (генетика) и разрешающей способности нашего зрительного восприятия, обманывает нас в очередной раз. В действительности, например, даже под школьным микроскопом никаких точек мы не увидим — всего лишь размытые, «мусорные» пятна. След., точка есть идеализированная абстракция. Это понятно: капля воды кажется нам непрерывным объектом, под сильным микроскопом мы можем видеть,

что она состоит из индивидуальных молекул. Но если мы желаем эту абстракцию использовать в математике, мы должны дать ее строгое определение. Такое определение у нас тут уже было: точка есть *бесконечная* последовательность (**) нулей и единиц.

Это значит, что для того, чтобы задать (указать) точку на отрезке $[0,1]$, некто должен реализовать *бесконечный процесс* построения последовательности (**), и здесь опять вопрос сводится к АБ или ПБ этого процесса. Если мы считаем, что этот процесс является ПБ, т. е. принимаем аксиому Аристотеля, то никаких точек вообще не существует, есть только конечные (рациональные) приближения к «точке». Чтобы точки «существовали» как некие индивидуальные объекты, этот процесс должен быть *завершен*, т. е. должен быть АБ-процессом, что возможно только при принятии аксиомы Кантора.

Так что «легкость представления АБ» очень обманчива, это «представление» целиком основано на генетической ограниченности зрительного аппарата и на последующей вольной экстраполяции наших обманчивых представлений, которые непереносимы в математику.

Почему мы «совершенно не в состоянии найти конструктивную интерпретацию актуально-бесконечного натурального ряда, хотя, казалось бы, он как дискретное множество по мощности «много слабее», «проще»?»

Я думаю и здесь причина связана с генетикой. Дискретный ряд конечных натуральных чисел явился первым математическим объектом, который породил в мозгу человека абстрактную идею возможности неограниченного продолжения, т. е. не-конечности, которую позднейшая рефлексия стала называть термином «бесконечность». Именно эта чувственно воспринимаемая не-конечность ряда (*), отсутствие в этом ряду последнего элемента стала чувственно воспринимаемым свойством не-конечности этого ряда, т. е. свойством его незавершаемости, т. е. потенциальности. Короче, именно *потенциальный* характер *бесконечности* ряда (*) «зашит» в нашем подсознании на почти генетическом уровне, а потому нужно совершить над этим подсознанием-интуицией «сокрушительное» насилие, чтобы представить себе этот бесконечный ряд (*) *как завершенный*, т. е. как АБ.

И еще раз, не может быть речи о первичности АБ или ПБ, поскольку выбор того или другого определяется «равноправным», чисто вкусовым выбором либо *аксиомы Аристотеля* (и тогда АБ-множеств просто не существует), либо *аксиомы Кантора* (и тогда не существует ПБ-множеств).

10. Если кто-то принимает ПБ, то «мощность» *всех* бесконечных множеств — одинакова (и неважно, как эту мощность называть). Если же кто-то принимает АБ, мощность множества всех четных натуральных чисел равна мощности множества всех натуральных чисел, т. е. имеет место знаменитый парадокс Галилея: «часть равна целому», каковой «факт» «доказывается» с помощью соответствия $n \rightarrow 2n$ и был использован Кантором в качестве общего определения понятия АБ-множества. Короче, «часть равна целому» если, и только если, это «целое» является АБ-объектом.

Извиняюсь за некоторые длинноты, — плюнул на все свои дела и решил немного отвести душу. Удивляюсь, но на этот раз повезло — никто и ничто не мешало. С уважением, Александр Зенкин.

А. В. — 3 июня 2003, 1:07 AM

Приветствую Вас, Александр! Текст на скрепке.

Скрепка:

Дорогой Александр!

Спасибо за щедрость, с которой Вы поделились со мной своими знаниями и соображениями по поводу некоторых «зудящих» вопросов. Всё как-то понемногу упорядочивается в

голове. Еще раз благодарю за лестные слова в мой адрес в связи с публикацией в прошлом Суздале. Эта тема *игры* постоянно увлекает меня — причем, с разных сторон: игровой природы творчества, художественного вкуса, чувства судьбы и даже со стороны той особой логики, которая внутренне *держит* произведение искусства. И вот здесь, я думаю, Вы бы вряд ли меня похвалили, поскольку я проявляю ту самую «нездоровую» заинтересованность в актуальной бесконечности, которая Вам, исповедующему строгий дедуктивный метод, не совсем, видно, по нутру. Хотя мне как раз нравится, что Вы вполне признаёте права АБ за границами строгой науки.

Складывается, однако, впечатление, что Вы пытаетесь вести сражение с АБ и за пределами математического доказательства. И вот это очень любопытно. Мне хочется понять, чем угрожало бы Вашей точке зрения, например, признание того, что чувство бесконечности все же не является, как Вы пишете, «онтологически пустым». В самом деле, а если бы это было неким априорным знанием, данным нам от природы на основании того, допустим, что мы внутренне представляем собой некую Монаду — в духе теории Лейбница или Лаоцзы, некую точку, «каплю», в которой отражается *вся* Вселенная. Согласитесь, ведь если бы знание об АБ было онтологически не пустым, для теории Кантора это бы все равно не давало никаких преимуществ, поскольку никак не избавляло бы ее от противоречий.

То есть, если выбор одной из аксиом (Аристотеля или Кантора) есть предмет веры, а не доказательства, то чего тогда «бороться» с той областью *веры*, которая — а вдруг! — содержит все основания для внелогического, дологического, априорного знания актуальной бесконечности? Или Вас пугает кантианский подход, идеализм? Очень хочется понять. Почему обязательно происходит «сокрушительное насилие», когда представляют себе бесконечный ряд как завершённый? Что, если источник знания АБ не только в опыте? И тогда обыкновенный *не-конченный* счет активизирует, пробуждает в нас реально-бесконечное, которое не есть метафора или вольность воображения, а именно знание, данное нам в некоем *архетипе целостности* — знание, не переводимое, однако, на строгий терминологический язык, точно так же, как мы не можем в полной мере «перевести» такие понятия, как *живое, свобода, страх* и т. д., хотя и способны найти им эквиваленты: *обмен веществ, случайность, адреналин*. Другими словами, почему лично Вам так важно, что в нашей подкорке «защито» *только* знание потенциальной бесконечности, если ни Вам, ни Кантору от этого никакого реального проку?

А вот прок для понимания природы творчества — прямой, поскольку позволяет, на мой взгляд, понять важнейшие парадоксы искусства и к тому же найти основания той логики, которая держит изнутри художественный организм. Искусство, на мой взгляд, будучи справедливо помещено в область интуиции, оказалось, по недоразумению, отлучено и от логики. А, тем не менее, разработке музыкальной ткани или развитию драматического действия присуще то, что мы внутренне часто ощущаем как процесс *доказательства*, который, однако, происходит по совершенно иным законам, нежели тем, на которых строится рациональная (дискурсивная) логика.

К тому же, креативная логика *сильнее* интеллектуальной и потому она совершенно не выразима в системе точных понятий, хотя подобраться к ней, схватить ее общие формы, на мой взгляд, можно. Вот тут, повторяю, мне дорогá идея актуальной бесконечности, которую как один из «обертонов» чувства прекрасного возбуждает в нас искусство, что имеет, однако, выход и на структурный уровень и потому в некоторой степени все же допускает применение аналитического метода. Если мой доклад напечатают в предстоящем Суздальском сборнике, то там как раз речь об этом.

Всё, больше не покушаюсь на Ваше время, поскольку по себе знаю: борьба с миром конечных проблем еще изнурительнее, чем с самой Бесконечностью.

С уважением, Анатолий.

А. З. — 9 июня 2003, 22.10.

Дорогой Анатолий, тоже все на «скрепке» — Вы и я по очереди, так удобней разбираться.

Скрепка:

А.В. Эта тема *игры* постоянно увлекает меня — причем, с разных сторон: игровой природы творчества, художественного вкуса, чувства судьбы и даже со стороны той особой логики, которая внутренне *держит* произведение искусства.

АЗ: Вы правы, это — *особая* логика, которая мало похожа на жесткую, двузначную (истина/ложь) логику Аристотеля.

АВ: И вот здесь, я думаю, Вы бы вряд ли меня похвалили, поскольку я проявляю ту самую «нездоровую» заинтересованность в актуальной бесконечности, которая Вам, исповедующему строгий дедуктивный метод, не совсем видно по нутру. Хотя мне как раз нравится, что Вы вполне признаёте права АВ за границами строгой науки.

АЗ: Напротив, если Вы заинтересованы в актуальной бесконечности, которая помогает Вам постигать глубинные аспекты «темы игры», то я не собираюсь осуждать такую заинтересованность, — это законное право Художника использовать любые (как правило, выходящие за рамки строгой науки) идеи, представления, мифологемы и т. п.!

АВ: Складывается, однако, впечатление, что Вы пытаетесь вести сражение с АВ и за пределами математического доказательства. И вот это очень любопытно.

АЗ: Да, я вынужден «сражаться» с АВ даже в социальной сфере, как это не покажется странным. Введение Кантором АВ в математику породило проблему парадоксов. Формалистическая «борьба» с парадоксами породила мета-математику и аксиоматическую теорию множеств. Помимо того, что эти две науки содержат прямые фатальные логические и методологические дефекты, они породили ничем не ограниченное господство формальных методов и «птичьих языков», по Пуанкаре, благодаря которым даже математики, работающие в смежных областях перестали понимать друг друга. И. В. Арнольд абсолютно прав, утверждая, что такая заформализованная математика бесплодна практически, а внедряемая (очень агрессивными) адептами в образование, «ведет к зомбированию (очень неглупых) студентов, которые, становясь профессиональными экспертами в промышленности и советниками президентов в области государственного строительства, помогают «научно» обосновывать такие «решения», которые ведут к событиям типа Чернобыля, 11 сентября 2001 г. и к социальной деградации общества (на примере б. СССР)».

АВ: Мне хочется понять, чем угрожало бы Вашей точке зрения, например, признание того, что чувство бесконечности все же не является, как Вы пишете, «онтологически пустым». В самом деле, а если бы это было неким априорным знанием, данным нам от природы на основании того, допустим, что мы внутренне представляем собой некую Монаду — в духе теории Лейбница или Лао Цзы, некую точку, «каплю», в которой отражается *вся* Вселенная. Согласитесь, ведь если бы знание об АВ было онтологически не пустым, для теории Кантора это бы все равно не давало никаких преимуществ, поскольку никак не избавляло бы ее от противоречий.

АЗ: *Чувство* бесконечности, *априорное* знание, Монадология Лейбница, отражение всей Вселенной в «человеко-образной» точке и т. п. — это красивейшие, глубокие, провокационные (в позитивном смысле) метафизические идеи, которые недоступны для логического (в духе Аристотеля) анализа. Поэтому их можно либо принимать, либо отвергать, ибо это область интуитивных предпочтений, а не логического доказательства.

АВ: То есть, если выбор одной из аксиом (Аристотеля или Кантора) есть предмет веры, а не доказательства, то чего тогда «бороться» с той областью *веры*, которая — а вдруг! — содержит все основания для внелогического, дологического, априорного знания актуальной бесконечности? Или Вас пугает кантианский подход, идеализм? Очень хочется понять. Почему обязательно происходит «сокрушительное насилие», когда представляют себе бесконечный ряд как завершённый? Что, если источник знания АБ не только в опыте? И тогда обыкновенный *не-конченный* счет активизирует, пробуждает в нас реально-бесконечное, которое не есть метафора или вольность воображения, а именно знание, данное нам в некоем *архетипе целостности* — знание, не переводимое, однако, на строгий терминологический язык, точно так же, как мы не можем в полной мере «перевести» такие понятия, как *живое, свобода, страх* и т. д., хотя и способны найти им эквиваленты: *обмен веществ, случайность, адреналин*. Другими словами, почему лично Вам так важно, что в нашей подкорке «зашиито» *только* знание потенциальной бесконечности, если ни Вам, ни Кантору от этого никакого реального проку?

АЗ: За аксиомой Аристотеля стоит тысячелетний *опыт* непротиворечивого использования математики, основанной на этой аксиоме, во всех сферах взаимодействия человека с Природой. За аксиомой Кантора стоят проблемы парадоксов, 3-й Великий Кризис оснований математики, который продолжается и до сих пор (более глубоко — это системный кризис самой «технологии» лево-полушарного, абстрактного мышления, фатально оторвавшегося от интуиции, «живого созерцания», генетических связей с Природой) и никакого практического применения теорий, основанных на этой аксиоме. Мне представляется, это достаточно важный аргумент в пользу аксиомы Аристотеля.

Что касается «внелогического, дологического, априорного знания актуальной бесконечности», «знания, данного нам в некоем *архетипе целостности*», то, повторюсь, такое знание есть предмет внелогических предпочтений субъекта и выходит за рамки дискуссий по поводу их рационального обоснования или опровержения.

Насчет ПБ, «зашиито в нашей подкорке». Конечно, это всего лишь гипотетическая реконструкция связи ПБ с практикой, поскольку никакой хирург, даже основательно «расковыряв» чью-либо подкорку никакой ПБ в ней не обнаружит (шутка). Однако анализ текстуальных канторовских определений АБ показывает, что в этих определениях есть все, кроме логики (Аристотеля, конечно).

АВ: А вот прок для понимания природы творчества — прямой, поскольку позволяет, на мой взгляд, понять важнейшие парадоксы искусства и к тому же найти основания той логики, которая держит изнутри художественный организм. Искусство, на мой взгляд, будучи справедливо помещено в область интуиции, оказалось, по недоразумению, отлучено и от логики. А, тем не менее, разработке музыкальной ткани или развитию драматического действия присуще то, что мы внутренне часто ощущаем как процесс *доказательства*, который, однако, происходит по совершенно иным законам, нежели те, на которых строится рациональная (дискурсивная) логика.

АЗ: Вы абсолютно правы «логика художественного организма» — это не логика Аристотеля. Это, по моему, даже не логика «причины-следствия», это «логика» интуитивного предожидания в музыке и «логика» Судьбы в драматическом действии. Большую роль здесь играют, как мне кажется, «зашиитые» в подкорке, т. е. интуитивные и рационально незознаваемые, стереотипы художественного восприятия и оценивания. — Ну, это уже проблемы для меня «закадровой» сложности и вообще не моя «епархия».

АВ: К тому же, креативная логика *сильнее* интеллектуальной, и потому она совершенно не выразима в системе точных понятий, хотя подобраться к ней, схватить ее общие формы, на мой взгляд, можно. Вот тут, повторяю, мне дорога́ идея актуальной бесконечности, которую, как один из «обертонов» чувства прекрасного, возбуждает в нас искусство, что имеет,

однако, выход и на структурный уровень и потому в некоторой степени все же допускает применение аналитического метода.

АЗ: Мне кажется, что Вы вкладываете в идею АБ очень глубокий, именно художественный, т. е. выходящий за рамки математического рационализма, смысл. Поэтому мне было бы интересно узнать, почему для Вас недостаточно оппозиции «конечное — бесконечное»? Прекрасное требует бесконечного постижения, — иначе это не Прекрасное, а ... нечто постигаемое. И для меня — вопрос: останется ли нечто, актуально постигнутое, — прекрасным? Может ли чувство прекрасного «резонировать» с актуально-бесконечным, т. е. завершенным, т. е. *за-конченным*?

Желаю всего самого доброго, Александр.

А. В. — 29 июня 2003, 0:47 AM

Дорогой Александр, добрый день! К сожалению, моя борьба со словами закончилась моим полным поражением. Свидетельством тому — текст на «скрепке».

Скрепка:

Итак, Александр, очень хорошо, что Вы своими вопросами дали мне повод несколько упорядочить собственные растрепанные мысли.

Попробую по порядку. Чувство прекрасного, на мой взгляд, не только «резонирует» с бесконечным, но и удостоверяет его присутствие в каждый данный момент, когда мы актуально переживаем художественное событие. В каком виде присутствует? Не знаю — может быть, открывается некий канал, связывающий нас с запредельным, может быть в нас активизируется реликтовый слой *под-(пред-над)-сознания*, «помнящий» о днях Творения или возникновения Мира. После Юнга это уже не может казаться полным вздором. Только вместо его архетипов *коллективного бессознательного* на первое место в философской эстетике я бы поставил некий личностный *императив целого* как врожденную творческую способность к созданию (и пересозданию) гармонического порядка. Здесь основным инструментом становится тактика игры.

Итак, зачем искусству АБ? Отвечу по возможности коротко, хотя не думаю, что очень связано. Потребность выхода на АБ, на мой взгляд, заключается в следующем.

1) Во-первых, в *парадоксе сложности*. А именно. Целое включает в себе множество частей, элементов, неким образом гармонически связанных между собой — целое, то есть, *сложно*. Но сложность сопряжена с *неопределенностью* (энтропией), а тем более целое развивающееся, которое, усложняясь, неизбежно тем самым должно терять гармоническую взаимосвязь частей — стало быть, терять качество целостности.

Однако этого не происходит. Наоборот, чем сложнее развитие в романе, фильме, фуге, симфонии, тем с большим азартом мы вовлекаемся в это зодчество — созидание гармонического целого (вместе с автором, который и сам в момент творчества заведомо не знает, какие очертания примет его произведение). Следовательно, целое, как и любой организм, изначально содержит в себе всё будущее многообразие. Итак, целое в искусстве реализует себя только через высокую степень сложности и, казалось бы — через высокую степень риска хаотизации, но этого не происходит, что говорит не о процессе агрегирования целого, а, по словам Бергсона, наоборот, о *диссоциации целого*, по-видимому представляющего собой (в своей идеальной основе) актуально бесконечное поле преобразований. Словом, целое онтологически трудно отделить от бесконечности и актуальности.

2) Далее, если говорить о таких видах искусства, где спонтанный момент особенно важен, то мы увидим, что именно случай, непредсказуемость становятся решающими факторами гармонической законченности. Свободная конфигурация мазка, замысловатые пятна патины на бронзе, не воспроизводимые импровизации джазового музыканта, всякий раз не-

ожиданные актерские решения в одной и той же пьесе — именно это приводит в восторг и придаёт произведению высшую эстетическую ценность (говоря по-человечески: даёт ощущение прекрасного).

Такое возможно только там, где есть условия для реализации целого через то, что не имеет алгоритмического решения — фактически, через случайное. Такое целое, реализовывая себя через вполне счетное число элементов (тактов, слов, нот), само по себе не может быть набором квантованных единиц. Это континуум, имеющий начало и конец, но, подобно числовой оси, обладающий тем, что можно было бы назвать несчетной природой.

3) Каждое произведение искусства (талантливое и вполне индивидуальное по почерку) есть единственное решение *из бесконечного числа возможных*. И чем индивидуальнее почерк (Пушкина не спутаешь с Бродским), тем уникальнее и значительнее художественное явление. Эту *единственность* мы на каких-то внутренних весах взвешиваем и соизмеряем с полем безграничных возможностей, заложенных в материале, с тем множеством художественных примеров, которые отложились в нашем опыте. Всё это вызывает в нас особую радость — подобно тому, как это происходит в игре, когда непредсказуемая комбинация, вероятность которой ни с чем не соизмерима (*бесконечно* мала), обеспечивает выигрыш.

4) Теперь о логике и системе доказательства в искусстве — и не в переносном, а вполне прямом смысле, но с существенной поправкой: такая *креативная логика* обратна логике аристотелевской, она основана не на принципе включения в класс и подведения под общее правило, а, наоборот, на выходе из всякого множества и подобия. Потому креативная логика строится не на отвлечении (абстрагировании), а на подчеркивании неповторимости и единственности, высшим проявлением чего является момент актуальности. Для нее *достаточным основанием* служит не то, что наиболее закономерно, а наоборот — непредсказуемое, и самый сильный *аргумент истинности* — спонтанное (случайное) и уникальное. Мы очень хорошо от природы владеем такой логикой: это, опять же, некий игровой инстинкт, который, в отличие от спортивных и прочих игр, строится на системе врожденных (безусловных) правил. Художник вообще должен настолько владеть самоограничительной системой безусловных и условных правил (материалом, языком, стилевыми нормами), чтобы, испытав силу из сопротивления, продемонстрировать свою способность к новому, свободному от прежних стереотипов — потому всегда красивому — решению. Так вот, чтобы случайность работала на целое, была бы инструментом формообразования, необходимо, чтобы целое изначально (актуально) было *заряжено бесконечностью*.

5) Теперь о художественном «инстинкте» — о врожденных правилах. К ним, с одной стороны, можно отнести всё, что мы внутренне ощущаем как «закольцованность», «зацикленность» на равномерном пошаговом движении или ритме — всё, что нам *эмоционально важно* как отношение подобия.

С другой стороны, у нас есть столь же неистребимая инстинктивная потребность в выходе из заданного порядка, в игровом высвобождении через комбинаторику и все то, что выходит из отношения подобия.

Главное, что и тем и другим мы внутренне «забочены» — не просто откликаемся эмоционально, а переживаем *экзистентно*, поскольку в этих аксиоматически простых состояниях выражены основные и жизненно важнейшие полярные формы нашей целостности: либо наша вовлеченность во множественные связи с внешним миром, которые невозможно локализовать, поскольку они потенциально не ограничены — бесконечны; здесь чувство надежности от постижения неких закономерных связей соединено со страхом перед «дурной» бесконечностью. С другой стороны, мы оказываемся способны подчинить множественные отношения единому целому, сфокусированном в нашем Я, укротить симметрию, замкнуть ее в том, что само в силу своей уникальности (единственности) выходит из отношения подобия (мультипликативности) и заключает, подобно монаде, бесконечное разнообразие в себе самом. И то, и другое состояние в силу своей

экзистентности обладает особой магической силой: циклическое единообразие связано с чувством фатальности, неотступной роковой силы — и влекущей к себе, и устрашающей. (Равномерные удары барабана или заклинательная метрика стиха вызывают обычно тревожное чувство). Древние называли подобную заикленность «колесом судьбы», которое можно было остановить только через мистерию очищения — театрализованную литургию. В общем, самая примитивная форма регулярности приобретала в глазах древних (в душах, скорее) силу проклятия. (Набоков тоже говорил о круге, «который всегда порочен», ибо связан с дурной бесконечностью.)

При этом именно такой регулярный, «неотступный» метроритм — основа искусства.

А с другой стороны — азарт игры, преодоление симметрии и вместе с ней — преодоление страха через открытие пути к актуальной («хорошей») бесконечности. Но можно еще говорить и о магии континуума (о *белом* не закрашенном поле картины и бесконечности, в нем сквозящей, написано в древних китайских трактатах), о таком же экзистентном отклике, который вызывает в нас пульсирующий бинарный такт (метр), регулярность и ее нарушения или шкала цветовых или звуковых отношений. Итак, коренным фактором экзистентных состояний является наше положение как целостных сущностей относительно бесконечности: поглощает ли она нас — или мы актуально вбираем ее в себя. Причем здесь математика?

В том то и дело, что упомянутые здесь «аксиомы» искусства (*экзистемы*) близки и аксиоматике научного мышления, то есть универсалии искусства и математики (логики), возможно, имеют общий корень. (У *Вайля* есть об этом). И то, что при строгом научном подходе создает противоречия, в художественном выражении представляет собой необходимые составляющие гармонического единства.

Короче, мне думается, что в той степени, в какой «начала» математики и логики могут быть экзистентно значимы, в той они могут и составлять «начала» искусства, (давая поэтому повод для слишком уж пристального структурного подхода к искусству). Но более конкретно говорить об этом опасаясь, поскольку «плаваю» в этой области.

6) Если вернуться к логике, то, мне кажется, следует говорить и об иерархии средств, задающих вектор развития. А именно: конечное множество (слов, персонажей, звуков и т. д.) подчиняется потенциально бесконечному (не-остановимому) множеству метра, ритма, инвариантных структур (типа стихотворной строфы) и т. д., что, в свою очередь, подчиняется более «сильному» и предельному уровню *целого* (монады), актуально включающего в себя бесконечность. (Есть еще, похоже, промежуточный уровень, структурно близкий *группе преобразований*.)

(Понимаю, что выражение «включающего в себя бесконечность» звучит несколько беспомощно, но пока не могу найти точной формулировки.) Вот этот вектор в сторону актуализации бесконечности и, соответственно, бóльших степеней свободы и есть внутренний вектор развития — он же вектор обогащения материала, совпадающий с направлением роста информации, однако в силу многих причин имеющий нелинейную форму.

7) Еще раз об *актуальном*. Если бесконечности мы можем приписать предикат актуальности или потенциальности, то само понятие *актуальности* имплицитно связано с бесконечным — хотя бы потому, что «острием» актуального является *момент*, который, находясь на границе прошлого и будущего, завораживает, как и точка, своей неуловимостью (апории Зенона), и при том своей громадной, ни с чем не сопоставимой и часто довольно драматической значимостью. (Те «чуть-чуть», от которых порой зависит жизнь). Это очень глубокая экзистентная категория, которую, опять же, мы переживаем с особой остротой в процессе игры (особенно в кульминации) — стало быть, и в момент творчества. Актуальность есть своего рода «вход» в бесконечность. Поэтому при аналитическом подходе — уже *после* прямого воздействия на нас произведения искусства — теряется и само произведение, теряется и важнейшая иррациональная составляющая

смысловой ткани, происходит подмена непосредственной формы бытия интеллектуальной.

8) Даже дети в каких-нибудь своих считалках находят в перепадах интонации «нелинейное» решение, для того чтобы придать словесной абракадабре вид вполне законченного периода. Складывается впечатление, что мы *от природы* обладаем интуитивной способностью в художественной ткани активизировать некие иррациональные точки (аттракторы), которые фокусируют в себе целое (ту же точку золотого сечения).

9) Если говорить о преобразованиях семантики, которые происходят, например, в стихотворной форме, когда самые бытовые понятия достигают особой символической высоты, то и здесь следует предположить, что в момент мобилизации творческих сил — чаще под воздействием пульсирующего ритма, «подключающего» нас к бесконечному — в нашем подсознании наводится некий смысловой фокус, смысловой аттрактор, который становится точкой «схода» для всех понятий, словно направляя их к семантическому пределу, где сходятся все оппозиции и где житейская и даже научная логика достаточно беспомощна. К тому же встреча с бесконечностью — непосредственно переживаемой или с ее образом в морском пейзаже — это всегда источник сильного и полного драматизма чувства, необычайно обогащающего семантику художественного произведения.

10) Вы спрашиваете, почему для меня не достаточно оппозиции «конечное — бесконечное», — потому, что стадия оппозиции свойственна интеллектуальному подходу, который признаёт такую (диалектическую) форму единства как предельную ступень философской рефлексии. Однако нам дана еще способность эстетическим «инстинктом» (или каким другим) постигать суть целого, в котором оппозиция эта не «зависает», а продуктивно работает на целое, когда мы *актуально* включены в процесс творчества, «замкнув» тем самым друг на друге бесконечное и конечное. Здесь, разумеется, нужны примеры, чтобы обосновать эту точку зрения, что очень не просто, как и в том случае, когда мы после завершения игры (допустим, в теннис) пытаемся восстановить ее эпизоды, но уже «на холодную голову», выйдя из самого актуального события, из состояния напряжения и самого азарта. Вы, Александр, правы в том, что музыке присуща «логика интуитивного предожидания», основанная на стереотипах художественного восприятия. Добавлю лишь, что есть стереотипы «защитые» (априорные реакции, *экзистемы*), а есть «благоприобретенные» — культурные «отложения», которые тоже гнездятся в подкорке, являясь нашим языком. Однако у художника такие «предожидания» несут функцию некой «ловушки», в которую он ловится сам, ловит нас — но с тем, чтобы тут же мастерски выволиться из нее, показав совершенно новое решение. Произведение искусства всё соткано из таких логических звеньев: автоматизм ожидания + индивидуальный почерк решения. Есть еще, видимо, и общая линия игрового «доказательства», которая связана с индивидуальной функцией каждого-то элемента относительно целого. Говоря об игре, я, разумеется, имею в виду не игривую легкость, а лишь тактику, которая роднит любой творческий поиск с игрой, которая, рискну дать ей такое определение, есть *инстинктивный (безусловный) алгоритм выхода из любого условного алгоритма*. Алгоритм игры состоит в потребности в ответ на заданный в своде «правил» порядок активизировать такие «несчетные» аргументы, как свобода, выбор, спонтанность, хаос. Итак, допущение актуальной бесконечности в искусстве, в отличие от математики, не создаёт, а разрешает многие парадоксы искусства: к примеру, почему «корсет» стихотворной строфы не душит, а, наоборот, необычайно расширяет эмоциональное дыхание и поднимает смысловой строй до уровня символа и т. д.

Благодаря принятию АБ в искусстве мы сохраняем и логику и при этом иррациональную основу творчества, оберегая смысловую ткань от интеллектуального натиска. Здесь не постулирование темной иррациональности творчества, а наоборот, уважение к мастерству — к владению областью «правил»: материалом и темой. В стройном и звуч-

ном стихотворении, где говорится о милых пустяках («*Лишь розы увядают, / Амброзией дыша...*»), гораздо больше, как Пушкин говорил, «неизъяснимого», нежели в ином туманном опусе, напрочь лишенном пушкинского совершенства. К сожалению, не удалось написать короче и внятнее, но, может быть, в целом я смог ответить на Ваши вопросы и заодно что-то прояснить для самого себя, при этом совершенно не имея коварного замысла втянуть Вас в дискуссию. Благодарю Вас, Александр, за проявленное внимание и всегда рад общению.

Всех Вам благ. Анатолий.

А.З. — 7 июля 2003, 19.32.

Дорогой Анатолий, у Ваших замечательных художественно-философских эссе, которые Вы мне присылаете, есть общий существенный недостаток — у них только один читатель. Надеюсь, пока! Нужен следующий Суздаль.

Не первый раз пытаюсь закончить ответ на Ваше последнее письмо, еще раз перечитал уже написанное мною и Ваше письмо и поймал себя на мысли, что мы обсуждаем проблему Актуальной Бесконечности (АБ), но я до сих пор не могу для себя сформулировать Ваше понимание АБ.

Попробуйте Вы сформулировать свое максимально четкое определение АБ. Думаю, что это будет способствовать продвижению к лучшему пониманию многих обсуждаемых проблем. Всего доброго, Александр.

А.В. — 10 августа 2003, 2:01 AM.

Дорогой Александр! Для меня оказалось приятной неожиданностью Ваше приглашение к более «строгому» разговору. Полагаю, что «приятность» в данном случае связана с тем, что я не в полной мере представляю себе, какая ответственность связывается для математика со словом «строгость». Но это неведение мне изрядно облегчило задачу, и вот — две страницы я прикрепил на «скрепку». Всех Вам благ. Анатолий.

Скрепка:

Итак, Александр, похоже, что не мы потревожили Бесконечность, а что уже она сама в очередной раз решила на нас (как и на многих) отыграться, втянув в нескончаемую полемику. Но разве это может не радовать! Итак, я попытаюсь ответить на Ваше последнее письмо. Бесконечность, актуально переживаемая как художественное откровение, не вызывает у меня никакого сомнения. И я бы с удовольствием ограничился словами Ван-Гога (из его письма к брату):

«В живописи есть нечто бесконечное — не могу как следует объяснить тебе, что именно, но это нечто восхитительное передает настроение...». Каким ветром ко мне принесло понятие АБ — из философии или математики, уже не помню, но она стала постепенно «ввинчиваться» в проблематику искусства и разбухать там к месту и не к месту. И Вы, Александр, пожалуй, правы: если от АБ не так просто отделаться, то раз уж она завелась, выказать ей свое уважение и попробовать говорить с ней на языке той области, из которой она «диффундировала». Вы призываете к строгости, что ж, попробую напустить на себя строгость, чтобы, по возможности, вывести «строгое определение». Я думаю, что АБ не просто возможна, но она неизбежно должна мыслиться, именно потому, что прочно узаконено другое понятие — ПБ. Всё дело в том, что категории *бесконечное* — *конечное* связаны не только исключительно с одним понятием *множества*, но неизбежно и с его отрицанием — с категорией *единое*. Именно *единое*, а не *один*, поскольку диалектическая пара к *множеству* есть то, что множеством не является. Таким «отсутствием множества» может быть лишь *единое* или *целое* — в отличие от «пус-

того множества» или «единицы», подпадающих, естественно, под ту же категорию множества. Возможно, *множество* и *единство* соотносятся друг с другом так же, как операции умножения и деления — одно есть обращение другого. (Хотя, насколько я понимаю, аддитивная операция и мультипликативная тоже являются отрицаниями друг друга. Как в таком случае понимать деление — не очень соображу.) Но я думаю, что, будучи предельными, такие категории, как *множество — единство, бесконечное — конечное, актуальное — потенциальное* и т. п. требуют не столько логического, сколько рефлексивного упорядочения. Возможно, я здесь впадаю в какой-нибудь гегельянский грех, но конфигурация взаимосвязи этих категорий, обнаруживаемая в интуиции, выстраивается в такую картину: если справедливо, что проекция (отношение) категории *бесконечности* на категорию *множества* дает, как Вы утверждаете, значение *потенциального*, то проекция *бесконечности* на категорию *единое* должна дать, соответственно, противоположный результат: значение *актуального*.

АБ есть категориальное дополнение *ПБ*, — так же как *потенциально бесконечное множество* есть такое же неизбежное «зеркальное» дополнение, негативный слепок к *актуально бесконечному единству*. Наверное, всё, что имеет недискретную природу — в первую очередь, само время и пространство — и что тем самым отрицает множественность, всё это, *будучи соотносено с множеством*, отрицает и те предикаты, которыми множество определяется. Если *множество* принимается с предикатом *ПБ*, то *единое* переворачивает его знак, образуя *АБ*. (Вероятно, переворот значения может дать и *потенциально конечное*, что тоже, думаю, не лишено смысла.) По-моему принцип категориального, негативного дополнения хорошо в свое время прочувствовал Зенон. Когда в его апории говорится, что Ахилл не догонит черепаху из-за того, что сокращающиеся до черепахи отрезки пути будут множиться до бесконечности, здесь мы ловимся на том, что, по отношению к потенциально бесконечной дискретной итерации, путь, который нужно пройти бегуну, представляется как то, что заведомо интегрирует в себе — то есть актуально! — всю бесконечную сумму предстоящих отрезков. Есть хороший эквивалент *АБ*-му — «неисчерпаемость». Не та, когда пытаешься вычерпать ведром море — оно-то как раз *в принципе* исчерпаемо, а когда, например, представляешь себе круг, остающийся бесконечно недостижимым — неисчерпаемым — для растущей «квадратуры». Вот здесь вспыхивает на какой-то момент — даже не ощущение, а чувство *АБ*. Я не знаю, насколько эта эквилибристика выдерживает критики на уровне формально-логическом, но в конечном итоге напрашивается такое определение: *актуально бесконечным можно считать всё, что является отрицанием множества*. Не просто отсутствием, а его категориальным отрицанием, диалектической парой. Если более «операционально», то, пожалуй, так: *актуально бесконечным можно назвать то, что остается тождественным себе при делении на любое количество частей, или: при выделении на нем любого по мощности множества элементов*. Итак, Александр, как и можно было предположить, попытка строгого определения *АБ* приводит к каким-то пустотно-гудящим фразам. Но на большее я не способен. Подобное определение (назовем его философским) в корне отличается от эстетического понимания *АБ*, где степень актуальности определяется только тем, насколько ярко мы способны *бесконечное* пережить, выявив как на смысловом, так и на структурном уровне. Окружность или лист белой бумаги может восприниматься как образ бесконечности, но, в отличие от чисто формального понимания как *актуальной бесконечности единого*, здесь она «пока еще» только потенциально-дремотна, (поскольку еще не дифференцирована).

Но вот китайский художник обмакнул кисть в банку с тушью, а потом провел одну единственную линию по белому листу — уверенную линию и, в то же время, легкую, свободную и *единственную*: со множеством совершенно непредсказуемых и неповторимых штрихов и нюансов. Он «задел» несчетную природу континуума и тем самым «распаковал», возбудил, заставил звучать — актуализировал — ту самую бесконечность, которая таилась

в белом листе. Однако здесь мы уже пересекли границу теории и вступили в область свободы и воображения.

Могут ли обогатить восприятие искусства подобные экзерсисы? — не думаю, зато они помогает прояснить в самом себе причины замешательства, в которое приходит интеллект при виде, допустим, карандашной линии, которую провел на бумаге Дюрер или Матисс. А уж в стихах или в музыке — тут тому самому интеллекту уготована сущая погибель.

Но порой это почему-то необычайно радует.

Спасибо, Александр, что в очередной раз терпеливо меня выслушали. И всех Вам благ.
Анатолий.