ГИМН КВАДРАТУ

В. В. Смолянинов

Исторической фигурой моего ретроспективного сказания будет простой квадрат.

В школьные годы моего детского фольклора была шутка — «прост, как квадрат». Видимо, каждого из нас детское ощущение простоты квадрата не покидает всю жизнь. С годами мы научаемся ценить простоту в разнообразных формах и проявлениях как своеобразную меру правильности и красоты, даже как меру мудрости нашей весьма сложной жизни. Высоко ценится простота и в науке как своеобразная, неподдающаяся формальному определению мера истинности. И все же.

Не правда ли, когда приходится говорить о чем-то со ссылкой «даже школьникам известно», возникает смутное ощущение банальности темы? Буду надеяться, что в данном случае это ощущение — ложное. По существу, в целом мы учим школьников не банальным вещам, а фундаментальным азам. И здесь главная наша задача — это избегать интеллектуальной девальвации фундаментальной ценности азов.

Квадрат имеет длинную математическую историю и более короткую — художественную. С последней как с преамбулы я и начну.

1. Квадрат человека и тьмы

Квадрат как мера человека изображен на широко известном рисунке Леонардо да Винчи (1452–1519). Возможность «вписывать человека в квадрат», видимо была известна и ранее. Схематический рисунок Леонардо (рис. 1 *а*) до сих пор производит магическое впечатление на самых разнообразных зрителей и весьма популярен — широко используется современными художниками в социальных, эргономических и экологических эмблемах как обобщенный символ «человеческого фактора». Хотя оригинальный рисунок Леонардо предназначен для наглядной демонстрации простого антропометрического закона конституции тела человека — размах рук равен росту, торжественная и величественная манера изображения человека в сочетании с двухплановой композицией — сочетание квадрата с окружностью — вызывает конкурирующие ассоциации распятия и полета.

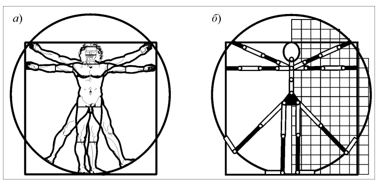


Рис. 1

Распятый человек пытается взлететь? Чтобы воскреснуть? Возродиться?

Абстрактная стилизация леонардовой композиции человека (рис. 1 *б*), выполненная мною для прикладных эргономических целей, воспринимается иначе, чем оригинал. На первый взгляд кажется, что абстрактная схематизация ведет к потере духовных компонент прототипа. Всякая ли абстракция сопряжена с потерей и даже утратой духовных компонент? Можно ли духовный мир человека отображать абстрактными живописными средствами? Живописные новации XX века в значительной мере порождены поисками ответа на этот вопрос.

Российский художник Казимир Северинович Малевич (1878–1935), несмотря на разностороннюю живописную, иллюстраторскую, дизайнерскую и другие формы художественной деятельности, более всего известен своей картиной «Черный квадрат», впервые представленной в декабре 1915 года на петроградской выставке. Всего на этой выставке Малевич показал 39 своих новых полотен под общим названием «Супрематизм живописи», а также распространял написанный им текст нового художественного манифеста — брошюру «От кубизма к супрематизму».

Даже из такой краткой информации о I супрематической выставке Малевича следует, что художник стремился продемонстрировать разнообразные аспекты нового, придуманного им художественного направления, но центральным образом или главным символом супрематизма стал именно «Черный квадрат на белом фоне», где белый фон тоже является квадратом (рис. 2 *а*). Малевич неоднократно менял стили своего художественного творчества. В последние годы жизни даже вернулся к реализму. Однако именно «Черный квадрат» превратился в своеобразный логотип всего творчества художника. Почему?

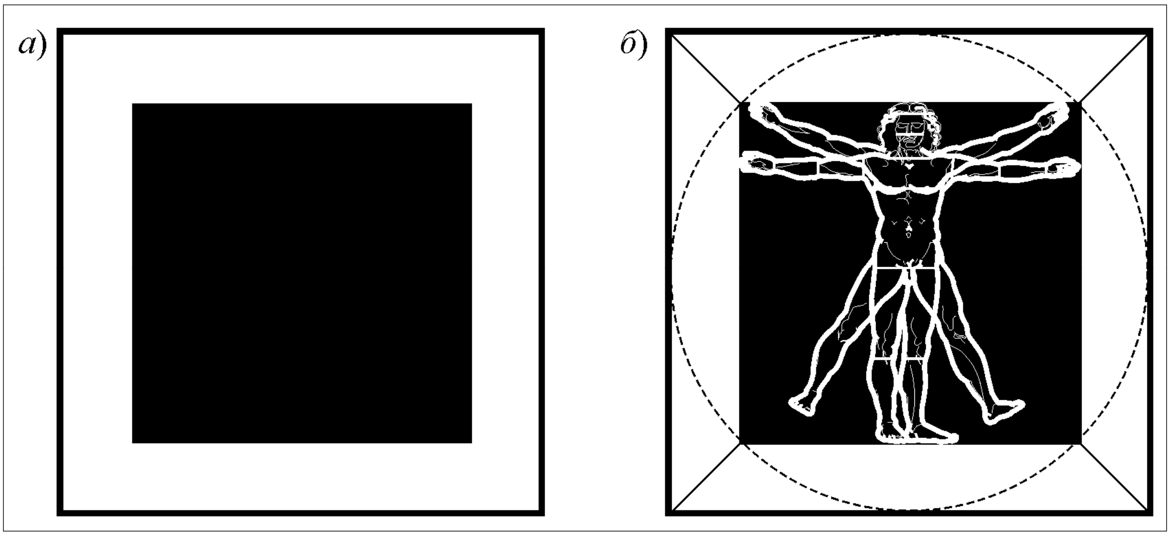


Рис. 2

Не углубляясь в художественные и философские поиски Малевича, несомненно интересные сами по себе, отмечу: из того, что «Квадрат» оказывал шокирующее воздействие на посетителей супрематических выставок и до сих пор задевает многих зрителей, так сказать, «за живое», еще не следует, что сам художник сознательно добивался такого эффекта и считал свой квадрат каким-то особым произведением или иконоподобным символом той тайны, которую должна открыть геометризация искусства.

Живописная трактовка «Черного квадрата» вызывает много недоуменных вопросов. Главный — такой: следует ли «квадрат», независимо «от цвета его кожи», воспринимать как самостоятельное живописное произведение? Можно ли одиночную примитивную и, тем более, черную фигуру на пустом белом фоне считать живописью, даже если произведена она по всем правилам станкового искусства? Допуская, в принципе, и утвердительные ответы, можно пытаться проникнуть в замысел композиции. Это живопись одинокой простоты или знак черного таинства бело-фонового одиночества? Тогда почему именно квадрат? Ведь одиноких, величественных, т. е. по своему совершенных фигур, если подумать, много. Чем квадрат предпочтительнее других? Или «Черный квадрат» — это символ совсем иного эмоционального качества? Или же эмоциональное восприятие тут не причем? Может быть, это только интеллектуальный знак некой скрытой во мраке познания непознаваемой сущности? Тогда, имеют ли разные фигуры разную познавательную сущность?

Интеллектуальная трактовка более соответствует истине. По-видимому, композиционная структура «Квадрата» Малевича подчиняется определенным геометрическим правилам построения, которыми пользовался автор, но которые остались зрителям неизвестными. Современный художник А. Ф. Панкин попытался расшифровать композиционные правила Малевича и, в частности, правила построения его «Квадрата» (рис. 2 *б*) — здесь дополнительная окружность является вписанной для внешнего белого квадрата и описанной для внутреннего черного квадрата.

Сам Малевич скорее всего рассматривал «Квадрат» просто как лаконичный символ супрематизма, т. е. как символ *предельной точки* тех редукционистско формальных тенденций в живописи, которые возникли сначала в импрессионистских поисках новых форм и стилей живописной выразительности и прошли довольно быструю эволюцию разрушения многовековых традиций визуально-художественного реализма — до абстракционизма, открытого русским художником В. Кандинским в 1910 году.

К. Малевич, как мы знаем, дружил с футуристами, в частности с В. Хлебниковым, и даже иллюстрировал в 1914 году его поэтический сборник. В предыдущие же годы иллюстрировал сборники других футуристов, в частности, А. Крученых. Поэтому символистические тенденции и образы были не только знакомы Малевичу, но и созвучны его творчеству. Я думаю, что символическая трактовка «Черного квадрата» более естественна именно потому, что она снимает ложные живописные ассоциации и даже позволяет понять причину выбора черного цвета. Здесь необходимо вспомнить о популярности своеобразного портретного жанра, когда вся фигура человека или только профильный контур головы вырезается из черной бумаги и наклеивается на белый фон, либо же такой силуэтный портрет создается посредством рисования. Многовековая популярность силуэтного портретирования, видимо, и побудила Малевича создать аналогичный символический портрет квадрата — черный силуэт квадрата.

Остается понять: почему в качестве супрематического символа был выбран именно квадрат, а не какая-либо другая фигура, например, пифагорейская пентаграмма? Поскольку о вкусах не спорят, попробуем иначе поставить вопрос.

Разве *квадрат* как историческая фигура и математики, и вообще естествознания, не заслуживает особого, даже портретного, выделения и, так сказать, поклонения? Нет ли в самом квадрате, как, впрочем, и во всем супрематизме, пифагорейской переклички заклинаний: от «Все — число!» до «Все — квадрат!»? Доля современной шутливости в такой перекличке несомненно присутствует. Ну, а если серьезно?

Среди плоских правильных фигур квадрат является базовым объектом для многих фундаментальных математических отношений. Попробую продемонстрировать справедливость этого тезиса на некоторых основных примерах.

2. Квадрат длины

Общую связь квадрата с длиной выражает всем известный закон («теорема») Пифагора: *сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы*:

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Из формулировки закона ясно, что речь идет только о прямоугольных треугольниках, тогда в формуле (1) величины x, y — произвольные длины катетов, z — соответствующая длина гипотенузы. Простая по форме и, казалось бы, по содержанию пифагорова связь квадрата с длиной инициировала непростые физико-математические проблемы, решение которых растянулось на века. Первой, можно сказать, «ошеломляющей» проблемой была «проблема соизмеримости отрезков прямых», которая интересна и с точки зрения психологии научного творчества, и как частный аспект общей проблемы метризации физического пространства.

До того, как Пифагор открыл и доказал свой общий закон, был известен по меньшей мере один прямоугольный треугольник $\{x, y, z\}$, длины сторон которого можно выразить в целых единицах, — треугольник $\{3, 4, 5\}$. Поиск других прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами породил проблему «пифагоровых чисел», алгебраическое содержание которой сводится к определению всех целочисленных решений уравнения (1).

Решение проблемы пифагоровых чисел «в лоб», простым перебором целочисленных величин катетов, сразу выявляет много «ненужных» вариантов, т. е. не дающих целых длин гипотенузы z при подстановке в (1) целых длин катетов x и y. Первая же тривиальная подстановка $x = 1$ и $y = 1$ дает $z^2 = 2$, т. е. нецелое число:

$$z = \sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097...$$

Можно без особого преувеличения сказать, что с открытия этого числа началась новая эра математики, вернее, не с самого числа, а с попыток понять «иррациональные» свойства диагонали единичного квадрата. Сейчас нам нетрудно сказать, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число, представимое бесконечной апериодической дробью, и нетрудно вычислить, тем более, используя компьютер, это число с точностью до любого конечного знака после запятой. Но пифагорейцы, конечно, ничего не знали об иррациональных свойствах чисел и пытались «соизмерить» диагональ квадрата рациональными частями длины его стороны. Невозможность такого рационального представления и было объявлено свойством «несоизмеримости».

Удивление по поводу несоизмеримости диагонали и стороны квадрата сильно нарушило созерцательное блаженство пифагорейцев и даже поколебало их уверенность в универсальности тезиса «все есть число», поскольку определить «число» диагонали не удавалось.

Пифагорейское удивление Аристотель резюмировал в «Метафизике» следующим философским образом:

> «И теперь и прежде *удивление* побуждает людей философствовать. Причем вначале удивлялись тому, что непосредственно вызывает недоумение, а затем, мало-помалу продвигаясь таким образом далее, задавались вопросом о более значительном. Недоумевающий и удивляющийся чувствует себя незнающим. Однако, если, таким образом, начали философствовать, чтобы избавиться от незнания, то, очевидно, к знанию стали стремиться ради понимания, а не ради какой-нибудь пользы.
>
> ... Все [ученые] начинают с удивления, например, *...несоизмеримости* диагонали, ибо всем, кто еще не усмотрел причину, кажется удивительным, если что-то нельзя измерить самой малой мерой. А под конец нужно прийти к противоположному — и к лучшему, когда в них разберутся: ведь ничему бы так не удивился человек, сведущий в геометрии, как если бы диагональ оказалась соизмеримой».

В «Аналитиках» Аристотеля можно найти указания на способы доказательства несоизмеримости. Один из способов — логический:

> «Несоизмеримость диагонали со стороной квадрата доказывают тем, что если признать их соизмеримость, то нечетное окажется равным четному. Таким образом, то, что нечетное оказывается равным четному, выводится на основании умозаключения, а что диагональ несоизмерима со стороной квадрата, доказывается исходя из предположения, так как из признания того, что противоречит первоначально принятому, получается ложное».

Вклад Аристотеля в разработку темы измеримости более близок физическому мировоззрению, ибо в его интерпретации пифагорейский тезис «все — число» приобретает смысл обобщенной физической метафоры «все — измеримо» при наличии, конечно, соответствующей меры:

> «Мера есть то, чем познается количество, ибо полагают, что знают количество, когда знают его с помощью меры. Количество же познается через число. Мера всегда однородна с измеряемым: для измерения длины используется некоторая длина, для звука — звук, для тяжести — тяжесть... Во всех этих случаях мерой служит нечто единое и неделимое... При измерении линий мы как неделимой пользуемся линией длиною в одну

стопу, или мы узнаем свой рост благодаря тому, что столько-то раз прикладывают к нам меру длины — локоть.

Мера, однако, не всегда бывает одна по числу; диагональ квадрата и его сторона измеряются двоякой мерой, равно как и все несоизмеримые величины».

Физический стиль мышления проявляется у Аристотеля и в его комментарии к тезису Протагора: «Человек есть мера всех вещей», который он рекомендует понимать не буквально, а иносказательно, с учетом интеллектуальных и чувственно-сенсорных способностей человека, с учетом его знаний и опыта решать проблемы понимания и экспертных оценок, когда именно знания и чувственные восприятия используются человеком в качестве «меры предметов» — «мы называем знание и чувственное восприятие мерою вещей потому, что мы нечто познаем при посредстве их».

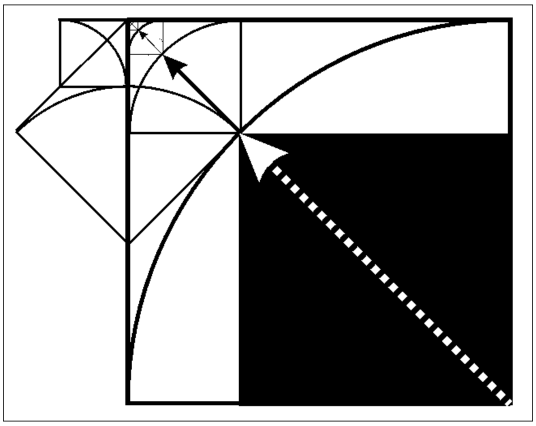


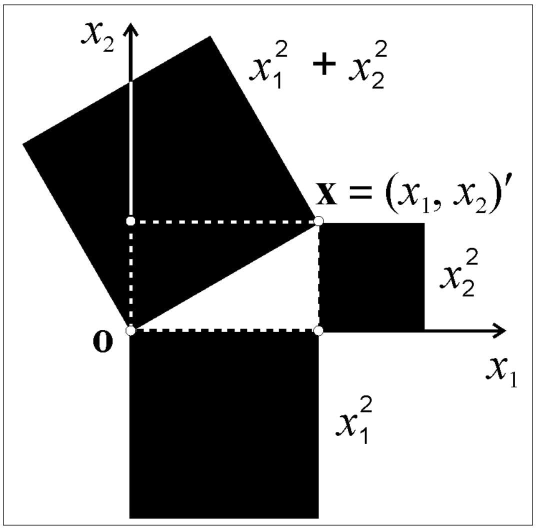
Рис. 3

Геометрический способ доказательства «циркульной» несоизмеримости диагонали и стороны квадрата показан на рис. 3, который наглядно демонстрирует бесконечность последовательного соизмерения диагонали стороной квадрата.

Современная математическая теория меры, основанная на понятии «континуума» вещественных чисел — это достижения конца XIX и начала XX веков. Первым же шагом к этой теории был *закон Пифагора*, а вторым — сравнение длин стороны и диагонали квадрата. Но перечисленными числовыми проблемами не исчерпывается фундаментальное значение квадратов Пифагора.

Фундаментальное *метрическое* значение квадраты Пифагора приобрели в современной версии геометрии Евклида. У самого Евклида, т. е. в его «Началах», этой темы не было. Она стала актуальной существенно позже — в XVIII и XIX веках, в связи с открытием «неевклидовых» геометрий — геометрии Н. И. Лобачевского (1792–1856) и др., а также в связи с освоением координатных методов описания пространственных объектов, породивших аналитическую геометрию. Именно современная аналитическая методология привела к обобщению древних геометрических понятий и, тем самым, открыла двери в многомерные пространства для всех желающих. Если древние математики вполне справедливо гордились отсутствием «царской дороги в геометрию», то современные математики имеют «собственную гордость» от открытости дорог в любые «многомерья» даже школьникам. Теоретические средства для таких путешествий предоставляет векторно-матричный язык геометрических представлений, который несомненно является величайшим лингвистическим достижением математики XX века, а практические средства персонального погружения в виртуальные многомерные миры дают нам современные компьютеры.

Базовой метрической формой многомерных евклидовых геометрий служит обобщенный закон Пифагора: *квадрат длины диагонали многомерного параллелепипеда равен сумме квадратов его сторон*. Координатные прямоугольники (на плоскости) и параллелепипеды (в пространстве) — это естественные компоненты декартовой (прямоугольной) системы координат, так как их стороны формируются координатными отрезками осей, а диагональ служит вектором, который соединяет начало координат с



выделенной точкой **x** плоскости (рис. 4) или пространства.

Итак, при использовании метода декартовых координат положение произвольной точки **x** на плоскости задается координатами x_1 и x_2, которые суть длины сторон координатного прямоугольника. Можно говорить, что осевые стороны координатного прямоугольника представляются координатными векторами $x_1\mathbf{e}_1$ и $x_2\mathbf{e}_2$, сумма которых и определяет вектор диагональной точки:

$$\mathbf{x} \equiv x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \equiv x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь единичные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ служат эталонами длины соответствующих координатных осей. Как видно из приведенной формулы (2), алгебраическое представление вектора **x** сводится к специальной записи — в виде столбца, но допустима и строчная запись $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)'$ или $\mathbf{x}' \equiv (x_1, x_2)$, где штрих обозначает операцию *транспонирования*, которая нужна для преобразований столбцов в строки и наоборот. Например, скалярное произведение векторов $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)'$ и $\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2)'$ формально определяется как умножение строки $\mathbf{x}'$ на столбец **y**,

Рис. 4

тогда, согласно формальным правилам вычислений матричных произведений, получается скалярная сумма парных произведений компонент: $\mathbf{x}'\mathbf{y} \equiv x_1y_1 + x_2y_2$. Поэтому при скалярном умножении вектора **x** самого на себя получается сумма квадратов компонент:

$$\mathbf{x}'\mathbf{x} \equiv x_1^2 + x_2^2 \equiv x^2, \tag{3}$$

— это и есть современная векторная запись закона Пифагора, в которой число x понимается как евклидова длина или «модуль» вектора **x**, т. е. $x \equiv |\mathbf{x}|$.

Неоспоримое преимущество векторной и матричной символики проявляется в математических описаниях многомерных объектов, ибо она позволяет однотипно определять свойства произвольных объектов n-мерных пространств. Только при этом следует помнить, что краткие символы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_n$, **x** и др. представляют n-мерные векторы, и тогда «скалярный квадрат» вектора равен сумме квадратов компонент:

$$\mathbf{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n)' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}'\mathbf{x} \equiv x_1^2 + \ldots + x_n^2 \equiv x^2. \tag{4}$$

Многомерная евклидова геометрия с пифагорейской метрикой определяется на основе векторной алгебры, в которой квадрат длины вектора вычисляется по формуле «скалярного квадрата» (4). Условие $\mathbf{x}'\mathbf{x} = \mathrm{const} \equiv r^2$ есть уравнение n-мерной гиперсферы, выделяющее множество эквидистантных точек, находящихся на одинаковом расстоянии r от начала координат. В этом случае единичная гиперсфера, когда радиус $r = 1$, или единичная окружность плоскости при $n = 2$, служит *эталоном длины* для всех изотропных направлений пространства (или плоскости).

Главное конструктивное достижение геометрической мысли XX века состоит в том, что при сохранении базовых аксиом линейной алгебры векторов, достаточных для построения *аффинной* геометрии — геометрии произвольных *линейных* преобразований, мы можем конструировать разные метрические геометрии посредством выбора разных эталонных многообразий, описываемых аналитически с помощью разных квадратичных форм, среди которых форма (4) являет собой лишь один из частных случаев. Ниже я вернусь к этой теме при обсуждении свойств хроногеометрии Минковского.

3. Квадрат площади

Для многих квадрат более всего известен в связи с проблемой «квадратных метров» квартиры, участка и т. д. С геометрической точки зрения проблема здесь состоит в том, что, как правило, прямоугольные площади, например, комнат, следует представить эквивалентным квадратом, т. е. квадратом, площадь которого равна суммарной площади прямоугольников этих комнат.

Как решается эта элементарная задача арифметическими (алгебраическими) средствами с использованием рулетки и микрокалькулятора, всем известно, поэтому о древнем методе «квадратуры прямоугольника» мало кто задумывается. С конструктивной точки зрения этот метод интересен тем, что допускает разные способы решения — с использованием либо окружности, либо гиперболы.

Наиболее раннее упоминание способа решения этой задачи имеется в «Метафизике» Аристотеля, где автор мимоходом отмечает, что для прямоугольника «превращение в *квадрат* — это нахождение средней пропорциональной», а в комментарии это замечание расшифровывается следующим образом: «для построения квадрата с площадью, равной площади прямоугольника, необходимо найти среднюю пропорциональную между сторонами этого прямоугольника». Что это означает?

Если прямоугольник $P(a, b)$ имеет стороны длины a и b и площадь $|P(a, b)| = S = ab$, то «средняя пропорциональная» c определяется алгебраическим условием:

$$a/c = c/b \;\Rightarrow\; c^2 = ab = S \;\Rightarrow\; c = \sqrt{ab}\,,$$

где величина c^2 и есть искомая квадратура, поэтому c — длина стороны искомого квадрата или равностороннего прямоугольника $P(c, c)$ той же площади $|P(c, c)| = S$.

Метод квадратуры прямоугольника с помощью обычного кругового циркуля — основного инструмента древних геометров, весьма прост (рис. 5 *а*) и не нуждается в дополнительных разъяснениях. Но если бы древние геометры изобрели гиперболический циркуль («гиперболограф»), рисующий гиперболы так же легко, как обычный циркуль — окружности, они смогли бы квадратурить прямоугольники еще более простым способом (рис. 5 *б*), используя характеристическое свойство равнобочной гиперболы. Все координатные прямоугольники равнобочной гиперболы имеют одинаковую площадь, что следует из определяющего уравнения $xy = c$.

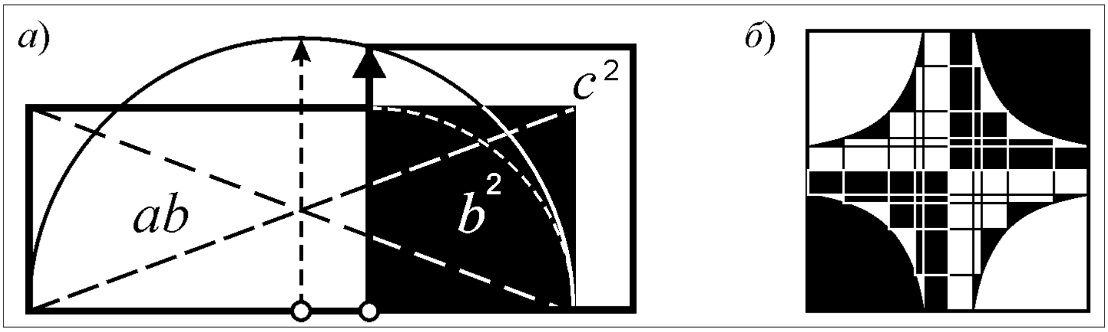


Рис. 5

Задача квадратуры круга — задача построения с помощью циркуля такого квадрата, площадь которого $S_\square = a^2$ равна площади круга $S_\mathrm{o} = \pi r^2$, — является «незабываемой» проблемой математики не только потому, что она привела к изучению особого иррационального числа

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95...,$$

которое оказалось трансцендентным, т. е. не представимым в виде корня из какого-либо рационального числа — это доказал Ф. Линдеман в 1882 г. Не менее важно, что квадратура круга, наряду с некоторыми другими задачами, привела к проблеме инструментальной неразрешимости казалось бы простых геометрических задач, которые позже были решены аналитическими методами.

Математических фанатов, самозабвенно пытавшихся с помощью циркуля и линейки решить проблему «квадратуры круга», в старину иронично называли «квадратуристами». Что же стимулировало неустанные поиски квадратуристов? Вполне возможно, что их интриговала простота циркульного построения и окружности, и квадрата, а также простота построения 1-го приближения. Если в квадрате Малевича (рис. 2) принять радиус вписанной окружности за «единицу», то площади вписанного и описанного квадратов равны соответственно 2 и 4. Отсюда в качестве 1-го приближения имеем $S_0 = \pi \approx 3$ — полусумма площадей двух квадратов; более точный результат дает следующее приближение: $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$; и т. д.

В наше время квадратурить круги стало не модно, но фанаты, слава богу, не перевелись, и проблемы — тоже. Мода на циркульный квадратуризм прошла благодаря разработке мощных аналитических методов интегрального исчисления, основы которого были заложены И. Ньютоном (1643–1727) и Г. В. Лейбницем (1646–1716). Но именно выяснение трансцендентной сущности числа π было решающим аргументом для доказательства неразрешимости квадратуры круга циркульным методом.

Таким образом, квадрат как геометрический объект привнес в математику еще одну фундаментальную проблему, которую обобщенно можно обозначить как проблему инструментальной неразрешимости, интерпретируя здесь «инструменты» как метод. Века проходят, инструменты и методы меняются, совершенствуются, но проблема их разрешимости, т. е. границ их применимости, хотя и проявляется не сразу, но, в конце концов, возникает, стимулируя поиски новых методов, новых инструментов.

Со времени Ньютона и Лейбница было изучено и вычислено огромное число разнообразных интегралов от элементарных и специальных функций, сформулированы частные и общие правила интегрирования, составлены справочники интегралов, насчитывающие тысячи вариантов подынтегральных функций, но, тем не менее, не исчерпывающие все теоретические и прикладные квадратурные потребности. В поисках выходов из таких ситуаций разрабатывались как методы аналитических приближений, так и новые инструментальные методы — например, курвиметры и планиметры, которые были первыми интегрирующими машинами механического типа, ибо они вычислительные квадратуры длины и площади реализовали посредством механических измерений. Эти механизмы несомненно являются шедеврами инженерной мысли и представляют также теоретический интерес, что ранее отмечал выдающийся математик Ф. Клейн (1849–1925). Но с практической точки зрения эра механических квадратурных измерителей, как и механических калькуляторов, закончилась.

Еще во времена моей ранней экспериментальной научной деятельности (60–70-е годы) мне приходилось пользоваться и курвиметром и планиметром для измерений периметров и площадей биологических клеток, формы которых весьма разнообразны — от простых полигональных до сложных «кляксообразных» и «фрактальных». Измерения выполнялись по увеличенным микрофотографиям, и для простых форм клеток механические измерители были вполне полезны, но совершенно бесполезны — для сложных форм. Для последних самым быстрым и точным оказался, в те, в общем-то, недавние времена, ручной метод «вырезай и взвешивай»: контуры клеток рисовались на бумаге, зарисовки вырезались ножницами, а вырезки взвешивались на торзионных весах. С появлением компьютерных планшетов (дигитайзеров) удалось исключить самую трудоемкую операцию вырезания и взвешивания, но оцифровку контура приходилось выполнять в ручную. Лишь недавно оптические сканнеры и программные трассеры контуров, которые оцифровывают пиксельное изображение контура (выдают декартовы координаты последовательных точек контура), позволили полностью автоматизировать процедуру «квадратуры клетки», решаемую компьютером.

4. Мнимый квадрат

Впервые извлекать квадратные корни из отрицательных чисел пришлось итальянскому математику Николаю Тарталья (1535), но, пытаясь найти «разгадку», он не публиковал свои результаты. Это за него сделал врач, астролог и математик Джироламо Кардано, опубликовавший в 1545 году книгу «Великое искусство, или Об алгебраических правилах», в которой имеются ссылки на первооткрывателя, но все же формулы Тартальи до сих пор носят имя Кардано. Приоритет же создания *исчисления* «софистических», по терминологии Кардано, чисел, имеющих в современной нотации вид комплексных чисел $a + b\sqrt{-1}$, принадлежит Р. Бомбелли (1526–1573) — его «Алгебра» (1572) содержит почти современные формальные определения алгебраических операций с такими числами, а также систематизированное изложение методов решения алгебраических уравнений степени 2, 3 и 4.

Тем не менее, проблема математической легитимности «мнимых» величин занимает умы математиков уже более 300 лет.

Самый удачный термин «мнимые числа» изобрел Рене Декарт (1596–1650), а Лазарь Карно в 1797 году писал:

> «мнимые количества ... представляют собой только алгебраические формы и иероглифы нелепых количеств».

Почему «мнимые числа», долго не получали признания у многих выдающихся математиков? Отвечая в данном случае на вопрос «почему?», приходится в большей мере отвечать на вопрос «зачем?», или, как любил говорить Аристотель, «ради чего?». Варианты возможных ответов впервые сформулировал современник Декарта — Альберт Жирар (1595–1632), который называл мнимые числа «невозможными»:

> «Могут спросить, к чему эти *невозможные* решения? Я отвечаю — для трех вещей: 1) для справедливости общего правила, 2) так как других решений нет и 3) ради пользы».

Формальная польза софистического («невозможного» или «мнимого») исчисления ранее была вполне убедительно показана Р. Бомбелли (см. выше), а Жирар первым (в книге «Новые открытия в алгебре», 1629) сформулировал:

> Общее правило: число решений — действительных и/или «невозможных», алгебраического уравнения равно степени этого уравнения.

Правило Жирара позже преобразовалось в *Основную теорему алгебры* (ОТА). Доказательством ОТА увлеченно занимались многие выдающиеся математики — Ж. Даламбер (1717–1783), Л. Эйлер (1707–1783), Ж. Л. Лагранж (1736–1813) и др., не сомневаясь при этом в правильности 2-го ответа Жирара, что «других решений нет».

Первым в этом ответе всерьез засомневался Карл Гаусс (1777–1855) — в его докторской диссертации (1799), в которой доказывается следующая теорема.

> Основная теорема алгебры (ОТА). Полиномиальное уравнение натуральной степени $n > 1$, имеющее вещественные коэффициенты, «может удовлетворяться либо действительным значением неизвестной, либо комплексным».

В кавычки здесь взята цитата из формулировки Гаусса, которая имеет интересное продолжение, обычно не включаемое в традиционную формулировку ОТА.

> «Так как помимо действительных и мнимых количеств $a + b\sqrt{-1}$ нельзя представить никаких других видов количеств, то не совсем ясно, чем отличается то, что надо доказать, от того, что предполагается в качестве основного предложения... Поэтому основное предложение может иметь только такой смысл: каждое уравнение может удовлетворяться либо действительным значением неизвестной, либо мнимым вида $a + b\sqrt{-1}$, либо, может быть, некоторым значением другого, еще неизвестного вида... Как эти количества, о которых мы не можем составить никакого представления, — эти тени те-

ней — должны складываться или умножаться, этого нельзя представить с ясностью, требующейся в математике».

Чему следует удивляться в приведенном рассуждении Гаусса, так это его чрезвычайно тонкой интуиции. Или это следствие его высокой математической строгости и природного педантизма? Что-то, видимо, было в упорных алгебраических исследованиях Гаусса, что навело его на размышления о возможности количеств другого вида. Может быть, он их даже искал, но не нашел. Подходящей идеи не было, но «тень» такой идеи осталась.

Первичные психологические трудности признания «явного» существования «мнимых» корней порождает самая простая и самая популярная геометрическая интерпретация алгебраического уравнения, приводимая и в школьных учебниках. Произвольный полином («многочлен») степени $n \geq 1$ определяется как сумма степеней произвольной величины x с вещественными коэффициентами. Считая x переменной величиной, мы рассматриваем весь полином как функцию $y(x)$, а коэффициенты полинома — как заданные параметры этой полиномиальной функции.

Рассмотрим квадратный полином $y(x) = x^2 - 2ax + b$, содержащий два параметра — это коэффициент при линейном члене a и свободный член b. Нас будут интересовать величины аргумента x, при которых функция $y(x)$ имеет нулевую величину, такие аргументы и называются *корнями* уравнения $y(x) = 0$. Квадратное уравнение замечательно для нашей темы тем, что *приводимо* к промежуточной форме полного квадрата, поэтому для него всегда можно написать явное алгебраическое решение:

$$y(x) = x^2 - 2ax + b = 0 \;\Rightarrow\; (x-a)^2 = a^2 - b \equiv d \;\Rightarrow\; x_{1,2} = a \pm \sqrt{d}\,, \tag{1}$$

— эта пара решений называется сопряженными корнями: $x_1 = a + \sqrt{d}$, $x_2 = a - \sqrt{d}$.

Таким образом, алгебраическая запись решений квадратного уравнения нам демонстрирует существование при всех вещественных параметрах a и b именно двух корней. Исключением служит случай нулевого дискриминанта: $d \equiv a^2 - b = 0$, тогда независимые параметры a и b связаны равенством: $a^2 = b$.

Построим семейство графиков $y(x; a, b)$ для разных параметров a и b.

Зафиксируем коэффициент $a = ½$ и будем изменять только свободный член b:

$$\begin{aligned} b &\in \{-1,\ {}^{-1}/_2,\ 0,\ {}^1/_8,\ {}^1/_4,\ {}^3/_8,\ {}^1/_2,\ 1,\ {}^3/_2\} \\ d &\in \{{}^5/_4,\ {}^3/_4,\ {}^1/_4,\ {}^1/_8,\ 0,\ {}^{-1}/_8,\ {}^{-1}/_4,\ {}^{-3}/_4,\ {}^{-5}/_4\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Как и следовало ожидать (рис. 6 *а*), графики демонстрируют явное существование *двух* корней только для положительного дискриминанта, когда $d > 0$.

Возможны другие варианты графических решений квадратных и других уравнений. Интересный и полезный эквивалентный вариант дает замена одного квадратного уравнения (1) системой двух уравнений Виета:

$$x_1 + x_2 = 2a, \quad x_1 x_2 = b, \tag{3}$$

которая содержит уравнение прямой и уравнение гиперболы, теперь точки пересечения этих линий определяют искомые корни. Однако и в этом графическом варианте соблюдается то же правило: при положительном дискриминанте имеется два корня, при нулевом — один, а при отрицательном дискриминанте — ни одного.

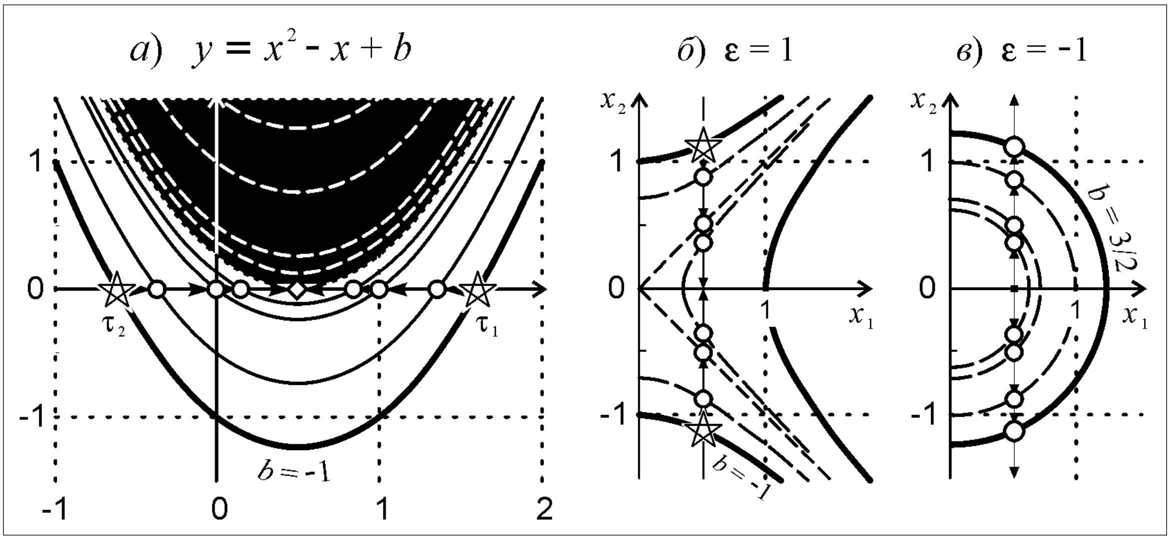


Рис. 6

Терпимое и конструктивное отношение к мнимым количествам как к особым «числам» стало складываться после того, как в 1777 году Леонард Эйлер ввел символ мнимой единицы $\mathrm{i} \equiv \sqrt{-1}$, а также открыл «замечательную» формулу экспоненциального представления КЧ (он же ввел обозначения cosα и sinα). После такой символической унификации появилась современная форма комплексных чисел:

$$x = x_1 + x_2\mathrm{i} \equiv \xi(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha) \equiv \xi e^{\alpha i}, \quad (\mathrm{i}^2 = -1); \tag{4}$$

здесь $\xi^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 \equiv |x|^2$ — эту вещественную величину позже О. Коши назвал квадратом «модуля» $|x|$, а угловую переменную α — «аргументом». Разрабатывая функциональную теорию КЧ, Коши ввел понятие «сопряженной» величины:

$$x^* = x_1 - x_2\mathrm{i} \equiv \xi e^{-\alpha i} \quad \Rightarrow \quad xx^* = x_1^2 + x_2^2 = \xi^2 \equiv |x|^2 \equiv ||x||, \tag{5}$$

где $||x||$ — норма КЧ, этот термин использовал К. Гаусс. Термин «*комплексные числа*» (КЧ) тоже принадлежит Гауссу (1831), который тем самым, следуя Эйлеру, хотел подчеркнуть составной характер чисел вида $a{\cdot}1 + b{\cdot}\mathrm{i}$, содержащих два рода единиц, где «1» — вещественная единица, а «i» — мнимая единица.

Простое формальное выделение «базисных единиц» {1, i} способствовало осознанию многомерной сущности КЧ, которая сначала воспринималась Гауссом как удобная геометрическая интерпретация:

> «Подобно тому, как всю область действительных величин можно представить с помощью бесконечной прямой, можно себе представить область всех величин, действительных и мнимых, с помощью бесконечной плоскости, где каждая точка, определяемая абсциссой *a* и своей ординатой *b*, представляет в то же время величину *a* + *b*i».

Особую новизну многомерной символической алгебры первым почувствовал Уильям Гамильтон (1805–1865), который, развивая гауссову геометрическую интерпретацию комплексных чисел, стал экспериментировать с разными вариантами задания символических базисов — дуплетных, триплетных и, наконец, четырехплетных. Благодаря алгебраическим экспериментам, Гамильтон открыл новые 4-местные числа — кватернионы, а структурный анализ кватернионов обогатил математический язык терминами и понятиями — скаляр, вектор, тензор, версор, ротор и др. — все эти когда-то очень новые математические слова придумал Гамильтон.

Гамильтонов кватернион (ГК) — это расширенное КЧ, как бы «трижды комплексное число». Сначала и сам Гамильтон думал, что достаточно к обычному КЧ добавить еще одну мнимую единицу и получится новое «*гиперкомплексное число*» (ГКЧ) — триплет или тринион, но так у него не получилось. Зато Гамильтону удалось открыть кватернион («4-нион») и следует, хотя бы кратко, удостоить вниманием этот шедевр алгебраического творчества:

$$x = x_1 + x_2\mathrm{i} + x_3\mathrm{j} + x_4\mathrm{k}, \qquad (\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1). \tag{6}$$

Из определяющих соотношений, помещенных в скобки, видно, что *все* три мнимые единицы ГК одинаковы — все *косоинволютивны*, являются точными копиями мнимой единицы КЧ. Именно поэтому ГК превращается в КЧ, если «занулить» любые две единицы их трех, выбирая одно из трех условий: 1) $x_2 = x_3 = 0$, 2) $x_1 = x_3 = 0$, 3) $x_1 = x_2 = 0$. Если же «занулить» любую одну мнимость кватерниона, то получить таким простым способом тринион не удается. Почему? Ответ на этот вопрос прояснится далее.

Родственные связи ГК и КЧ отражает и следующее общее свойство этих чисел.

З а к о н м о д у л я . Квадрат модуля числа равен *сумме* квадратов компонент.

Справедливость закона модуля для КЧ — в виде суммы двух квадратов — следует из закона Пифагора для прямоугольного треугольника (см. рис. 4), а для ГК (6) верен обобщенный аналог закона Пифагора — в виде суммы четырех квадратов:

$$|x|^2 \equiv ||x|| \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Простой метод вычисления нормы ГК опирается на понятие *сопряженной* величины x^*. Преобразование: $x \rightarrow x^*$, интерпретируется как алгебраическая операция «зеркальной симметрии», осуществляется посредством изменения знаков мнимых частей.

Изменяя знаки мнимых компонент ГК (6), получаем сопряженную величину:

$$x^* = x_1 - x_2\mathrm{i}_2 - x_3\mathrm{i}_3 - x_4\mathrm{i}_4. \tag{7}$$

Алгебраическое преимущество выделения сопряженных величин становится понятным в связи с существенным упрощением вычислений обратных величин:

$$x{\cdot}x^* \equiv ||x|| \quad \Rightarrow \quad x^{-1} = x^*/||x||. \tag{8}$$

КЧ и ГК имеют общий рецепт вычисления обратной величины. Формулы (8) позволяют выделить особый вид «эталонных» КЧ и ГК, для которых *сопряжение эквивалентно обращению*, что соответствует случаю единичной нормы $||x|| = 1$.

Иначе эталонные полинионы называются *унимодулярными* (*унинормальными*).

Список общих свойств КЧ и ГК можно продолжить, но перейдем к различиям.

Кватернион привнес в алгебру не только новое многоместное число с расширенным алгебраическим базисом {1, i, j, k}, но и новое принципиальное качество алгебраических операций умножения — возможность не коммутирования сомножителей, когда *от перестановки сомножителей произведение изменяется*!

В определяющих условиях ГК (6) пропущено 4-е соотношение — тройное произведение ijk = –1, которое исходно было выделено Гамильтоном как соотношение, определяющее свойство *косой коммутативности* мнимых единиц — парная транспозиция мнимых единиц приводит к смене знака произведения: jik = ikj = kji = 1. Косая коммутативность базисных единиц и есть источник некоммутативности ГК.

Вслед за Гамильтоном на поиски новых многомерных «чисел» отправились многие математики — Беджамин Пирс (1809–1880), Джеймс Сильвестр (1814–1897), Артур Кэли (1821–1895), Вильям Клиффорд (1845–1879), Георгий Фробениус (1849–1917) и др. Для нашей частной темы квадратов наибольший интерес представляет открытие Клиффорда — автора широко известной книги «Здравый смысл точных наук» (1873).

Более всего самого Клиффорда интересовали бикватернионы, но заодно он не прошел мимо более простых алгебраических объектов — аналогов КЧ с инволютивной единицей — *двойных чисел* (ДЧ): $x \equiv x_1 + x_2\mathrm{i}$ ($\mathrm{i}^2 = 1$). Фактически этим, так сказать, скромным открытием Клиффорд вывел на алгебраический свет гауссовы «тени теней», и при том «с ясностью, требующейся в математике».

Другую «дуальную тень» КЧ позже открыл Э. Штуди (1899) — числа с нильпотентной единицей или *ниль-числа* (НЧ): $x \equiv x_1 + x_2\mathrm{i}$ ($\mathrm{i}^2 = 0$).

Алгебра этих новых чисел довольно проста, поэтому рассмотрим сразу обобщенную модель, которую в конце XIX века исследовал российский математик и механик А. П. Котельников (1865–1944). Объединяя КЧ, НЧ и ДЧ, мы можем в единой форме представить 2-местное число — *обобщенный бинион* (ОБ):

$$x = x_1 + x_2\mathrm{i}, \;\; \mathrm{i}^2 \equiv \varepsilon \in \{-1, 0, 1\}; \qquad (9)$$

где обобщенная мнимая единица i может соответствовать разным мнимым квадратам, т. е. разным частным вариантам чисел,

$$\text{КЧ: } \mathrm{i}^2 = -1; \;\;\; \text{НЧ: } \mathrm{i}^2 = 0; \;\;\; \text{ДЧ: } \mathrm{i}^2 = 1. \qquad (10)$$

В этом списке бинионов более странными, чем КЧ, выглядят ДЧ и НЧ. Например, сразу трудно сообразить, зачем вводить в качестве «новых» такие «двойные числа», у которых обе базисные единицы $\{1, \mathrm{i}\}$ обладают как бы одинаковыми свойствами — их квадраты совпадают: $1^2 = \mathrm{i}^2 = 1$. Как следует понимать саму, так сказать, «мнимую единицу» i, если $\mathrm{i}^2 = 1$, т. е. если никакой явной «мнимости» в ней нет. Если мы выделяем дополнительное «определение» $\mathrm{i} \equiv \sqrt{1}$, то возникает ощущение тавтологии, и такое ощущение вполне закономерно при традиционной *скалярной* интерпретации бинионов.

Такое ощущение исчезнет, когда мы ниже перейдем к более современным *матричным* моделям чисел.

Символьная трактовка базисных единиц $\{1, \mathrm{i}\}$ бинионов (9) сродни духу современной абстрактной алгебры. Не вникая в первичное содержание базисных единиц, мы просто договариваемся о правилах алгебраической игры, включая в эту игру формальные символические правила (10).

Таким образом, в алгебре уже давно созрела революционная ситуация.

Гаусс сомневался в полноте *основной теоремы алгебры* (ОТА) до того, как были изобретены другие типы бинионов, кватернионов и др. Казалось бы, с открытием новых типов чисел было бы естественно переформулировать ОТА с учетом новых вариантов решений полиномиальных уравнений. Однако последующие исследования и классификации многоместных чисел осуществлялись вне контекста ОТА.

Рассмотрим «проблему Гаусса» — проблему полноты ОТА, в ее частном квадратном варианте.

Геометрическая интерпретация КЧ, использованная Гауссом (см. приведенную выше цитату), фактически сводится к векторному представлению КЧ. Следуя идее Гаусса, мы интерпретируем вещественную часть ОБ как абсциссу x_1 точки плоскости, а мнимую часть — как ординату x_2, т. е. скалярную запись КЧ $x = x_1 + x_2\mathrm{i}$ мы можем заменить векторной, вводя символ вектора $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)'$, скалярные компоненты которого представляют координаты точки *обобщенной бинионной плоскости* (ОБП), представляемой кратко символом $X^2 \equiv \{x_1, x_2\}$. Графическое совмещение разных сущностей естественно вызывает недоумение.

Как на обобщенной плоскости X^2 различать разные бинионы — КЧ, НЧ и ДЧ?

Общий ответ здесь таков: вещественные точки $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)' \in X^2$, относящиеся к разным бинионам, могут совпадать, но при этом разным числам соответствуют разные варианты метризации плоскости. Поэтому для локальной идентификации типа ОБ нужно дополнительно тестировать его метрику.

С целью характеризации метрических свойств ОБ построим многообразия унимодулярных бинионов, имеющих единичные нормы $||x|| = 1$. Вводя сопряженный ОБ $x^* = x_1 - x_2\mathrm{i}$, находим квадратичную форму нормы:

$$||x|| \equiv xx^* = x_1^2 - \varepsilon x_2^2, \tag{11}$$

полагая здесь $||x|| = 1$, для трех типов бинионов (10), получаем три уравнения,

$$\text{КЧ: } x_1^2 + x_2^2 = 1; \quad \text{НЧ: } x_1^2 = 1; \quad \text{ДЧ: } x_1^2 - x_2^2 = \pm 1. \tag{12}$$

Унимодулярные бинионы представляются на обобщенной плоскости X^2 разными эталонными линиями (12). Все эквимодулярные бинионы «концентричны» эталонным. Концентричность плоских линий естественно выражается с помощью полярных координат $\{\xi, \alpha\}$, где ξ — полярное расстояние, α — угол, так как условие постоянства полярного расстояния ξ = const есть геометрическая интерпретация эквимодулярности, и наоборот. Эталонным линиям (12) отвечает условие $\xi = 1$. Одинаковые «декартовы» формы бинионов (9) имеют, согласно (10), (12), разные *полярные* формы:

$$\text{КЧ: } x = \cos\alpha + \sin\alpha\ \mathrm{i}, \quad \text{НЧ: } x = 1 + \alpha\ \mathrm{i}, \quad \text{ДЧ: } x = \mathrm{ch}\alpha + \mathrm{sh}\alpha\ \mathrm{i}. \tag{13}$$

Уточним полярную запись ДЧ: вариант (13) описывает только основные ветви гиперболы, им соответствует положительный модуль $\xi = 1$; *сопряженные* гиперболы описываются формой $x = \mathrm{sh}\alpha + \mathrm{ch}\alpha\ \mathrm{i}$, так как им соответствует отрицательный модуль $\xi = -1$.

После общей алгебраической подготовки мы возвращаемся к старому вопросу идентификации корней квадратного уравнения (1), но с учетом новых моделей (10).

Выше, при решении уравнения (1), мы использовали метод приведения к полному квадрату, результатом которого было образование дискриминанта. Теперь, учитывая правило овеществления мнимой единицы ОБ, мы применим метод «мнимого квадрата», чтобы исключить мнимую единицу:

$$(x_2\mathrm{i})^2 \equiv \varepsilon x_2^2 = (x - x_1)^2 = x^2 - 2x_1x + x_1^2.$$

Учитывая определение нормы (12), получаем квадратное уравнение ОБ:

$$x^2 - 2x_1x + ||x|| = 0. \tag{14}$$

Понимая в этом уравнении коэффициент x_1 и свободный член $||x||$ как *произвольные* вещественные числа, мы приходим к новому выводу.

Все частные модели ОБ — КЧ, НЧ и ДЧ, удовлетворяют одному и тому же квадратному уравнению (14).

Чтобы завершить тему мнимого квадрата, нам осталось заново решить исходное уравнение (1), используя *метод типирования* ОБ.

Пусть опять дано уравнение (1), т. е. известны те же, что и ранее, вещественные параметры a и b. Требуется построить бинионные решения данного уравнения. Сравнивая записи (1) и (14), имеем формулы связи параметров a и b с компонентами x_1 и x_2:

$$1)\ x_1 = a, \quad 2)\ ||x|| \equiv x_1^2 - \varepsilon x_2^2 = b, \quad 3)\ d \equiv a^2 - b = \varepsilon x_2^2. \tag{15}$$

Как и ранее дискриминант играет роль главного признака типирования корней, с той лишь принципиальной разницей, что теперь — это идентификатор типа биниона:

$$\varepsilon \equiv \mathrm{sign}(d) \in \{-1, 0, 1\}, \tag{16}$$

знаковая функция имеет три значения: $\mathrm{sign}(d < 0) = -1$, $\mathrm{sign}(0) = 0$, $\mathrm{sign}(d > 0) = 1$.

Примеры графических иллюстраций новых бинионных решений, представленные на рис. 6 (*б* и *в*), построены для тех же старых значений параметров a и b, которые использовались в построениях графиков на рис. 6 *а*. На новых графиках хорошо видно, что множество значений переменного параметра b, см. (2), специально выбрано так, чтобы совпадали точки $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)' \in X^2$, представляющие бинионные корни типа ДЧ (рис. 6 *б*) и типа КЧ (рис. 6 *в*). При фиксированной величине $a = ½$ все корни в плоскости X^2 находятся на вертикальной прямой $x_1 = ½$ и каждому фиксированному значению b соответствует пара зеркально симметричных точек $\mathbf{x}_{1,2} \equiv (½, \pm x_2)'$, где $x_2 = |d|^{1/2}$. Для наглядной идентификации бинионных типов корней на приведенных рисунках дополнительно построены эквидистантные линии, определяемые в полярных координатах $\{\xi, \alpha\}$, согласно определениям (11)–(13). Метрическое поле корней типа ДЧ является гиперболическим (образуется семейством канонических гипербол), а типа КЧ — циркулярным (образуется семейством канонических окружностей).

Особые свойства НЧ корней заслуживают отдельного специального рассмотрения и здесь не обсуждаются.

Кратко резюмируем предыдущее длинно сказанное.

До введения 2-мерной геометрической модели КЧ главный алгебраический приоритет имели исключительно вещественные корни, а комплексные корни относились к категории «невозможных» и «мнимых» только на том основании, что они «исчезают» на элементарных вещественных графиках полиномиальных функций (см. рис. 6 *а*), т. е. только потому, что их не удавалось графически изобразить. Хотя визуализация сама по себе не служит окончательным вердиктом доказательства существования какого-либо математического объекта, включая мнимые корни, тем не менее, чтобы решить проблему виртуальной визуализации мнимых решений полиномиальных уравнений, пришлось изобрести «комплексную плоскость». Считается, что «мистика мнимых величин» была развеяна геометрической интерпретацией КЧ, предложенной именно Гауссом, хотя аналогичные интерпретации разрабатывали и другие математики — Каспар Вессель (1799), Лазарь Карно (1803), Жан Арган (1806). Не уточняя различия, назовем геометрические интерпретации КЧ, исходящие от Гаусса, Аргана и др., *классической комплексной плоскостью* (ККП).

После введения ККП главный алгебраический приоритет получили КЧ, оккупировавшие всю плоскость X^2 с выделенными осями вещественных и мнимых компонент. Теперь КЧ, согласно традиционной версии ОТА, выступают в роли общей модели всех решений квадратного и других полиномиальных уравнений, тогда как вещественным решениям отводится роль 1-мерных «вырожденцев» КЧ, место которых — только на вещественной оси, когда «зануляется» мнимая компонента.

Описанная выше *обобщенная бинионная плоскость* (ОБП) существенно изменяет геометрическую интерпретацию корней квадратных уравнений — она выравнивает алгебраические приоритеты и вещественных и комплексных решений, которые становятся методически «равноправными» 2-мерными объектами ОБП. Произведенное бинионное обобщение ОТА ставит новые проблемы, но основной все же остается старая:

> Можно ли считать проблему «мнимого квадрата» исчерпанной, хотя бы в отношении квадратного уравнения?

На современном этапе решения проблемы Гаусса выявилась, по меньшей мере, новая альтернатива поиска решений алгебраических уравнений, выражаемая «антирадикальным» образом как следующий

> П о л и н и о н н ы й п р и н ц и п. Не следует говорить о «разрешимости полиномиальных уравнений в радикалах», следует говорить о разрешимости этих уравнений в соответствующих алгебраических числах *полинионного* типа, решениями квадратных

уравнений служат бинионы, кубических — тринионы, уравнений 4-й степени — кватернионы, и т. д.

Согласно этому принципу *гамильтонов кватернион* (ГК) должен удовлетворять уравнению 4-й степени. Используя предыдущие определения ГК, см. формулы (6) и (7), вычислим сначала квадрат:

$$x^2 = 2x_1(x_1 + x_2\mathrm{i}_2 + x_3\mathrm{i}_3 + x_4\mathrm{i}_4) - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \equiv 2x_1x - \|x\|. \tag{17}$$

Этого вычисления вполне достаточно. После сравнения полученного результата (17) с квадратным уравнением бинионов (14) мы можем сделать неожиданный фактический вывод, не совпадающий с обобщенным теоретическим прогнозом.

Кватернион Гамильтона удовлетворяет квадратному уравнению (14).

Если у ГК, как сказано выше, много общих свойств с КЧ, то полученный вывод можно отнести к одному из свойств *родственной* общности. Не удивляться здесь, все же, не следует. Ведь выше ничего не было сказано про другие «негамильтоновы» кватернионы! Вообще говоря, если множество типов бинионов не исчерпывается комплексными числами, то и множество типов кватернионов не должно исчерпываться только гамильтоновой моделью. Не перечисляя все возможные варианты типологии кватернионов, я ограничусь списком *обобщенных кватернионов* (ОК), все мнимые единицы которых обладают свойством квадратичной овеществимости унитарного варианта $\varepsilon = \pm 1$ и *ранжируются* символом Q_r по числу r косоинволютивных единиц ($r = 0, 1, 2, 3$):

$$Q_0\text{: } \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = 1;\;\; Q_1\text{: } \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -\mathrm{k}^2 = 1;\;\; Q_2\text{: } \mathrm{i}^2 = -\mathrm{j}^2 = -\mathrm{k}^2 = 1; \tag{18}$$

т. е. Q_3 — это ГК (6). ОБ нечетного ранга — Q_1 и Q_3, являются не коммутирующими, но именно они удовлетворяют квадратному уравнению, тогда коммутирующие ОБ Q_0 и Q_2 удовлетворяют уравнению 4-й степени, что и декларировалось выше.

В заключение темы мнимого квадрата вспомним о происхождении КЧ и ГК.

КЧ произошли из решений квадратных уравнений и являются в этом смысле *реальными* математическими объектами, имеют «глубокие алгебраические корни», несмотря на длительные упреки в «мнимости» и «абсурдности». А ГК? По свидетельству самого Гамильтона, кватернионы были им открыты в состоянии инсайта, т. е. являются *вымышленными* математическими объектами — их породил гений Гамильтона, а не какие-либо процедуры извлечения корней. Генеалогическая ретроспектива порождает философский вопрос математической гносеологии.

Можно ли было бы отрыть ГК как решения квадратного уравнения?

Итак, мнимый квадрат, посеяв своим алгебраическим явлением большую смуту в математике, затем, приобретя геометрическое наполнение, радикально преобразовал всю алгебру, оставшись, тем не менее, на настоящее время не исчерпанным.

Является ли сегодняшняя не исчерпанность мнимого квадрата свидетельством его неисчерпаемости?

Как бы это ни казалось парадоксальным, но чтобы полнее разобраться с истоками бинионного разнообразия мнимого квадрата, следует полнее изучить свойства систем двух линейных уравнений, которые определяются свойствами квадратного характеристического уравнения, и наоборот. Этой новейшей алгебраической технологии, открывающей необычные перспективы, посвящены разделы 6 и 7.

5. Золотой квадрат

Термин «золотое сечение» стал широко использоваться в 19 веке, а до этого более употребительным был термин «божественная пропорция», введенный средневековым итальянским математиком Лукой Пачоли в одноименном трактате (1509 г.), который иллюстрировал Леонардо да Винчи. Однако исходно золотое сечение безымянно и скромно использовалось в геометрических построениях Евклида как

> Правило деления произвольного отрезка «в среднем и крайнем отношении»: «отношение большей части отрезка к меньшей равно отношению всего отрезка к большей части».

Если $c \equiv a + b$ — суммарная длина частей: $a > b$, то согласно правилу деления:

$$a/b = c/a = (a + b)/a = 1 + b/a \quad \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = ab. \tag{1}$$

Далее, либо полагая $a = x$ и $b = 1$, либо полагая неизвестным отношение $x \equiv a/b$, получим квадратное уравнение — «*золотой квадрат*» (ЗК):

$$x^2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0. \tag{2}$$

Корни ЗК стандартно записываются в виде двух иррациональных чисел:

$$\tau_1 \equiv \tau = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803\ldots,\ \tau_2 = 1 - \tau = (1 - \sqrt{5})/2 = -0{,}61803\ldots,$$

положительному корню обычно присваивается автономный символ τ — символ «*золотого числа*» (ЗЧ). Древний способ построения ЗЧ τ, связан с пифагорейской пентаграммой (рис. 7 *а*), из которой вытекает евклидово свойство правильного декагона:

$$2\cos(2\pi/10) \equiv 2\cos 36^\circ = \tau. \tag{3}$$

Это свойство используется в книге 6 «Начал» Евклида для доказательства формулы: $a_5^2 = a_6^2 + a_{10}^2$ — квадрат стороны пентагона равен сумме квадратов сторон гексагона и декагона. Поскольку a_6 — радиус окружности, в которую вписываются правильные полигоны — пентагон и декагон, доказательство дополняется построениями, согласно которым $a_6 = \tau a_{10}$ и $a_5^2 = (3 - \tau)a_6^2$. В книге 13 эти плоские методы Евклид применяет для построения 3-мерного правильного икосаэдра.

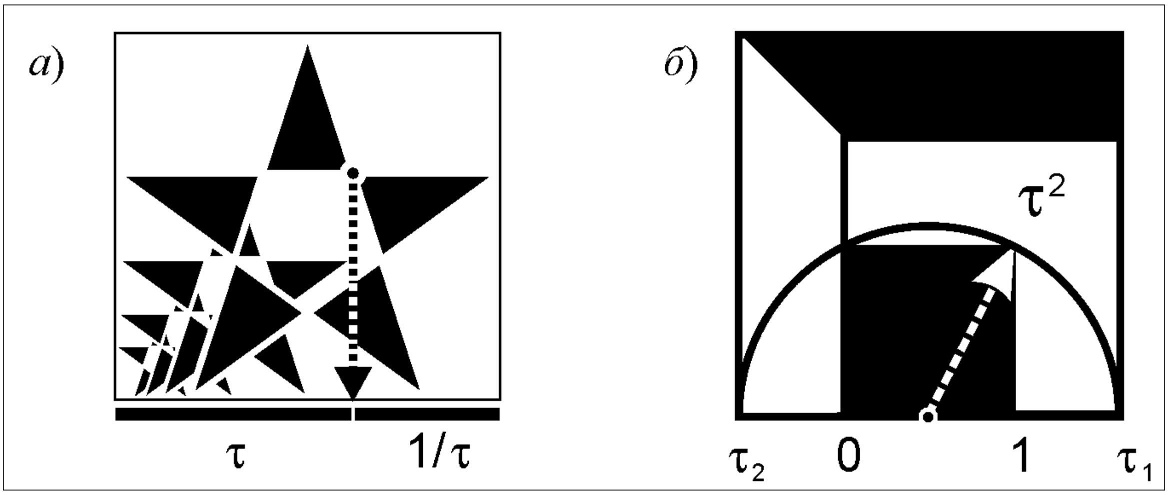


Рис. 7

Другой, технически более простой, способ построения ЗК —посредством вписывания квадрата в полуокружность (рис. 7 *б*): при единичной длине стороны квадрата, расстояние от вершины квадрата, находящейся на диаметре полукруга, до более удаленного конца диаметра равно τ. Именно этот способ Евклид использует для построения правильного додекаэдра.

Евклидовы графические методы построения ЗК интересны тем, как в них используется циркуль, вернее, окружность. Например, для графического доказательства евклидовой формулы (3) следует с помощью циркуля вписать в окружность правильный декагон. В наш век аналитических методов и компьютерного сервиса мы вряд ли станем натурно воспроизводить «дремучие» технологии и для этого искать давно не используемый циркуль. Теперь нам проще заменить циркуль *комплексным числом* (КЧ), а саму процедуру вписывания фигуры наблюдать на компьютерном экране, написав для этого необходимую программку. Чтобы вписать декагон в окружность единичного радиуса, мы возьмем КЧ в тригонометрическом формате:

$$x \equiv \cos\alpha_{10} + \sin\alpha_{10}\mathrm{i} \equiv \exp(\alpha_{10}\mathrm{i}), \qquad (\mathrm{i}^2 = -1;\ \alpha_{10} = 2\pi/10); \tag{4}$$

а чтобы построить все вершины, вычислим по известной формуле Муавра степени данного КЧ, $x^m \equiv \exp(m\alpha_{10}\,\mathrm{i})$, для всех натуральных m от 1 до 10. Изображая эти вершины на *комплексной плоскости* $X^2 \equiv \{x_1, x_2\}$ (описание этой плоскости дано в предыдущем разделе), обратим внимание на две вершины, находящиеся на вещественной оси абсцисс: $x^5 = -1$, $x^{10} = 1$.

Сменив инструменты, нам нужно подумать и о смене методов. С целью демонстрации преимущества современных аналитических технологий выберем в качестве основного следующий вопрос: как с помощью «циркуля» (4) доказать формулу (3)? Достаточно применить два условия: 1) квадратное характеристическое уравнение КЧ, рассмотренное в предыдущем разделе; 2) циклическое условие овеществления:

$$x^2 = 2x_1\,x - 1, \qquad x^5 = -1, \tag{5}$$

здесь x_1 — общий символ вещественной части произвольного КЧ $x \equiv x_1 + x_2\mathrm{i}$, а свободный член 1-го уравнения представляет единичную норму, $\|x\| \equiv x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Т е о р е м а . Из условий (5) следует $2x_1 \equiv \tau$.

Доказательство, ввиду его простоты, опускается. Доказав базовое свойство циркульной технологии — золотое свойство (3), далее нетрудно аналогичным методом доказать и все остальные формулы, используемые в построениях пентагона и декагона, а также икосаэдра и додекаэдра.

Однако метод «комплексного циркуля» (4) не порождает «золотого исчисления», этой цели более адекватен метод «гиперболического циркуля».

В предыдущем разделе уже фигурировал золотой квадрат (2) как пример уравнения, вещественные корни которого (эти корни на рис. 6 выделены звездочками) можно интерпретировать как *двойные числа* (ДЧ). Смену понимания алгебраической сути ЗЧ τ отражает гиперболический формат записи ДЧ:

$$x \equiv x_1 + x_2\mathrm{i} = \rho(\mathrm{ch}\alpha + \mathrm{sh}\alpha\ \mathrm{i}) \equiv \rho\exp(\alpha\mathrm{i}), \qquad (\mathrm{i}^2 = 1). \tag{6}$$

Аналитическая тонкость здесь состоит в том, что гипербола имеет два типа ветвей: основные канонические ветви описываются уравнением $x_1^2 - x_2^2 = 1$, а сопряженные ветви — уравнением $x_1^2 - x_2^2 = -1$.

Эту «тонкость» необходимо учитывать, так как ДЧ-решения уравнения (2) находятся на сопряженных ветвях (см. рис. 6 *б*). В целом же, отличие от КЧ, приходится различать два варианта сопряжения ДЧ:

1. алгебраическое сопряжение — это обычное зеркальное сопряжение $x^* \equiv x_1 - x_2\mathrm{i}$, которое необходимо для различения двух корней;

2. геометрическое сопряжение $x^\Diamond \equiv \mathrm{i}x \equiv x_2 + x_1\mathrm{i}$, которое необходимо для идентификации гиперболических ветвей — его можно интерпретировать как отражение относительно асимптот гиперболических ветвей.

Итак, ДЧ-решения уравнения (2) алгебраически описываются геометрически сопряженным унимодулярным бинионом:

$$x^\Diamond \equiv \mathrm{i}x = \mathrm{sh}\alpha \pm \mathrm{ch}\alpha\mathrm{i} \quad \Leftarrow \quad \mathrm{sh}\alpha = ½\,,\ \mathrm{ch}\alpha = \sqrt{5}/2. \tag{7}$$

Унимодулярность проверяется вычислением нормы: $||x|| = x_1^2 - x_2^2 = 5/4 - ¼ = 1$, а величина полярного аргумента α вычисляется согласно известным формулам:

$$\mathrm{ch}\alpha + \mathrm{sh}\alpha = \mathrm{e}^\alpha = (\sqrt{5} + 1)/2 \equiv \tau \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln\tau = 0{,}4812118250\ldots\,.$$

Для завершения анализа геометрических свойств решений ЗК (2) следует добавить, что ДЧ $x = \mathrm{ch}\alpha + \mathrm{i}\cdot\mathrm{sh}\alpha \equiv (x^\Diamond)^\Diamond \equiv \mathrm{i}x^\Diamond$, которое получается геометрическим сопряжением золотого ДЧ (7), служит решением другого уравнения: $x^2 = \sqrt{5}\,x - 1$. Корни этого уравнения представляются на канонической гиперболе точками $\mathbf{x}_\pm = (\sqrt{5}/2, \pm 1/2)'$.

Предыдущий сравнительный анализ разных типов бинионов (см. предыдущий раздел) вполне подготовил нас к ревизии основ «золотого исчисления». Посмотрим теперь на формулу $\tau^2 = \tau + 1$ не как на «квадратное уравнение», а как на преобразование новой базисной единицы.

С этой целью мы введем новые *золотые числа* (ЗЧ):

$$x \equiv x_1 + x_2\mathrm{i}, \qquad (\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} + 1), \tag{8}$$

— квадрат базисной единицы здесь не овеществляется, как в случае ДЧ, а только «редуцируется» по величине степени.

Первая новая проблема, возникающая при создании нового исчисления, обусловлена необходимостью определения алгебраического сопряжения. Поскольку здесь традиционное *правило зеркального сопряжения* — не работает (в этом не трудно убедиться прямой проверкой), мы воспользуемся *правилом инверсионного сопряжения*, т. е. будем искать такое ЗЧ x^*, чтобы произведение $x\cdot x^*$ представляло норму ЗЧ: $x\cdot x^* \equiv ||x||$.

Вычислим квадрат x^2 — согласно заданному свойству (8), затем полученный результат преобразуем к форме характеристического полинома:

$$x^2 = (2x_1 + x_2)x - (x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2) \equiv \mathrm{tr}(x)x - ||x||. \tag{9}$$

Зная норму ЗЧ, нам теперь требуется решить систему двух линейных уравнений:

$$x_1y_1 + x_2y_2 = ||x||,\ x_2y_1 + (x_1 + x_2)y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = x_1 + x_2 - x_2\mathrm{i}. \tag{10}$$

Специфику нового исчисления легче понять, если вместо предыдущих ДЧ (7) построить новые ЗЧ-решения того же уравнения (2). Такое построение выполняется на основе полинома (9), который становится эквивалентом уравнения (2), если компоненты ЗЧ (8) удовлетворяют следующим двум уравнениям:

$$2x_1 + x_2 = 1,\ x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \{\mathrm{i},\ 1 - \mathrm{i}\} \equiv \{g_1, g_2\}. \tag{11}$$

Первое ЗЧ-решение $x = \mathrm{i} \equiv g_1$ вполне очевидно, тогда как 2-е решение $x = 1 - \mathrm{i} \equiv g_2$ является сопряженным, согласно правилу (10). Для «пущей важности» назовем эти новые решения g_1 и g_2 — золотыми корнями золотого уравнения, т. е. это «*дважды золотые числа*» (ДЗЧ). Существенно, что ДЗЧ являются унинормальными, а это свойство сохраняется при возведении ДЗЧ в произвольную степень. Унинормальные («эталонные») гиперболы ЗЧ описываются, согласно (9), следующими уравнениями:

$$x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 = (x_1 - x_2/\tau_1)(x_1 - x_2/\tau_2) = \pm 1, \tag{12}$$

здесь в скобках выделены линейные формы, определяющие «золотые асимптоты».

Вычислим возрастающие натуральные степени ДЗЧ и посмотрим как они распределяются на эталонных гиперболах (12) — эти распределения степеней ДЗЧ демонстрирует рис. 8. Расшифруем визуальные ряды приведенного рисунка таблицей:

n	1	2	3	4	5	6	…	n
g_1^n	0 +i	1 + i	1 + 2i	2 + 3i	3 + 5i	5 + 8i	…	$\phi_{n-1} + \phi_n$ i
g_2^n	1 – i	2 – i	3 – 2i	5 – 3i	8 – 5i	13 – 8i	…	$\phi_{n+1} - \phi_n$ i

Теперь мы можем сделать интересный новый вывод.

Эталонные гиперболы ЗЧ проходят через целочисленные точки, принадлежащие решетке чисел Фибоначчи. Последовательность степеней ДЗЧ оккупирует попеременно пары ветвей смежных гипербол.

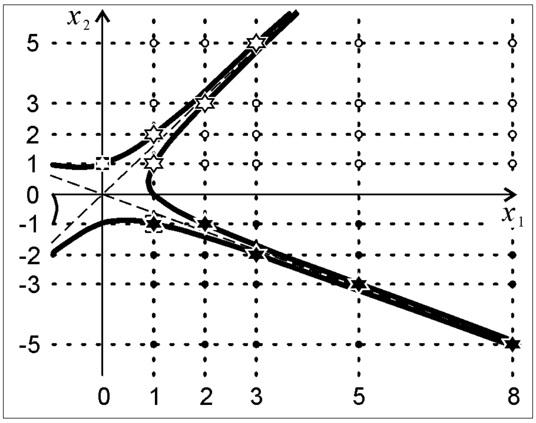


Рис. 8

Одну из причин неувядающего с древних времен интереса к ЗЧ шутливо и справедливо отметил известный лоббист математических головоломок Матрин Гарднер:

«Всякий раз, когда где-нибудь возникает золотое сечение, можно с уверенностью заключать пари, что где-то поблизости находятся числа Фибоначчи».

Связь иррационального ЗЧ с целыми *числами Фибоначчи* (ЧФ) множества

$$\Phi \cong \{\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} \mid \varphi_1 = \varphi_2 = 1\} \cong \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots\}, \tag{13}$$

на первый взгляд кажется эзотерической и магической. Иоганн Кеплер (1571–1630) был первым, кто исследовал математические свойства ЧФ, открыл 2-шаговую реккурентность последовательности ЧФ и открыл асимптотическую связь ЧФ с ЗЧ:

$$\lim(\varphi_n/\varphi_{n-1})_{n\to\infty} = \tau.$$

Обращаясь к предыдущей таблице и формуле (12), мы видим, что предельная формула Кеплера соответствует положительной асимптоте эталонных гипербол, представляемой прямой $x_2 = \tau_1 x_1$, где $g_1^n \equiv \varphi_{n-1} + \varphi_n$ i и, значит $\tau_1 \approx \varphi_n/\varphi_{n-1}$. Кроме того, из тех же аналитических данных следует существование второй отрицательной асимптоты, представляемой прямой $x_2 = \tau_2 x_1$, где $g_2^n \equiv \varphi_{n+1} - \varphi_n$ i и, значит $\tau_2 \approx -\varphi_n/\varphi_{n+1}$.

Еще одна загадочная связь — формула Бине (1786-1856), в которой целое число Фибоначчи выражается через иррациональные корни золотого квадрата:

$$\phi_{n-1} = (\tau_1^n - \tau_2^n)/(\tau_1 - \tau_2). \tag{17}$$

Особо интересна универсальность формулы (17) по отношению к форме исходного квадратного уравнения. Обобщая форму, мы получаем и обобщенные ЧФ. Чтобы убедиться в этом, заменим золотой квадрат аналогичным «черным квадратом» (здесь используется аналогия с «черным ящиком», ибо так математики называют объект, внутреннее содержание которого априори не известно, но подлежит идентификации):

$$x^2 = ax + b, \tag{18}$$

здесь a и b — произвольные вещественные числа, т. е. фактически (18) — произвольное квадратное уравнение, корни которого обозначим через x_1 и x_2.

Опять будем рассматривать условие (18) как «редуктор», позволяющий любую целую положительную степень числа x, т. е. число x^n при $n \geq 2$, представить полиномом 1-й степени вида $a_{n-1}x + b_{n-1}$, где $a_1 = a$, $b_1 = b$. Начнем с $n = 3$ и продолжим далее:

$$x^3 = ax^2 + bx = a_2 x + b_2,\ \ldots,\ x^n = a_{n-2} x^2 + b_{n-2} x = a_{n-1} x + b_{n-1}\,. \tag{19}$$

Отсюда, с учетом (18), получаем необходимые рекуррентные формулы:

$$a_n = a\, a_{n-1} + b_{n-1}, \qquad b_n = b\, a_{n-1}; \tag{20}$$

1-ю из которых перепишем, учитывая 2-ю,

$$a_n = a\, a_{n-1} + b\, a_{n-2}. \tag{21}$$

Теперь совсем уже нетрудно видеть важный результат:

> если черный квадрат (18) заменить золотым квадратом, полагая $a = b = 1$, то последовательность a_n порождает ЧФ, согласно определяющему условию (13).

Так как общая формула (19) верна для *каждого* из корней уравнения (18), обобщенная формула Бине получается автоматически:

$$x_1^{\,n} = a_{n-1} x_1 + b_{n-1},\quad x_2^{\,n} = a_{n-1} x_2 + b_{n-1} \quad\Rightarrow\quad a_{n-1} = (x_1^{\,n} - x_2^{\,n})/(x_1 - x_2). \tag{22}$$

Последней формуле (22) стоит удивиться! Ведь она верна для произвольного «черного квадрата» (18).

Следовательно, последовательности (21) не обязательно являются фибоначчиевыми, т. е. классического вида (13). Классификация *так* обобщенных возвратных последовательностей, насколько мне известно, отсутствует и ее еще предстоит осуществить.

Обозначу эту тему как «проблему черного квадрата».

Итак, обобщая формулу Бине, мы заодно нашли общий метод получения многих других последовательностей, порождаемых «черным квадратом». Следующий шаг к обобщениям вполне очевиден — от квадратов перейти к кубам и т. д. Например, черный и золотой кубы исходно задаются следующими алгебраическими полиномами:

$$x^3 = ax^2 + bx + c \quad\Rightarrow\quad x^3 = x^2 + x + 1,$$

а порождаемые этими кубами возвратные последовательности — таковы:

$$a_n = a\, a_{n-1} + b\, a_{n-2} + c\, a_{n-3}, \quad\Rightarrow\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Из последнего определения, в частности, получаем множество

$$\Phi_3 \cong \{1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, \ldots\},$$

замечательные свойства которого тоже заслуживают изучения. На выводе «кубических» аналогов формулы Бине и других обобщениях я останавливаться не буду.

Кода темы золотого квадрата вполне оптимистична: любой полином n-й степени мы можем интерпретировать как «редуктор» общего вида, а также выделять в этом n-мерном разнообразии последовательностей особые золотые гиперкубы, определяемые полиномом $x^n = x^{n-1} + \ldots + x + 1$.

Я думаю, на этих «приисках» нас ждет грандиозная «золотая лихорадка».

6. Квадрат интервала

Мы подошли к волнительной теме, с которой начинался XX век. Помните? Молодой не физик, а патентовед, направил первую свою статью в физический журнал. И ее, приняв автора за физика, сразу напечатали. Потому как тема оказалась актуальной и подход к проблеме был оригинальным. Автор предлагал строить физическую теорию на постулате, а не на результатах измерений. Научный дебют молодого А. Эйнштейна во многих отношениях уникален. Всего на полкорпуса, как говорят бегуны, опередить маститого математика, а именно А. Пуанкаре, который уже несколько лет размышлял на аналогичные релятивистские темы и который тоже, но с небольшой задержкой, послал свою обширную статью в другой компетентный журнал. Суть этой «научной драмы идей» не в приоритетных проблемах, которые позже широко обсуждались, а, по-моему, в различиях подходов к созданию физических теорий.

С одной стороны, Г. А. Лоренц (1853–1923) и А. Пуанкаре (1854–1912) решали прямую задачу электродинамики — сначала Лоренц открыл преобразования, относительно которых инвариантны электродинамические уравнения Максвелла, а затем Пуанкаре выявил групповые свойства «преобразования Лоренца» и описал инварианты этой группы, в список которых попал «интервал» и свойство постоянства скорости света. С другой же стороны, А. Эйнштейн (1879–1955) развил, в указанной выше работе 1905 года, обратный подход — ввел *постулат постоянства скорости света* (ППСС) и показал, что из него следует преобразование Лоренца. Вопрос: какой из этих подходов (прямой или обратный) является более правильным? — не относится к существу дела создания теории, поскольку всякая полная теория нуждается в анализе всех возможных подходов. Интересно, что специальная теория относительности не завершилась работой Эйнштейна, так как в 1908 году Г. Минковский (1864–1909) предложил третий подход — он показал, что для получения преобразования Лоренца достаточно постулировать *инвариантность интервала* — так возникла хроногеометрия Минковского.

Термин «интервал» буквально означает «промежуточная величина» или «величина промежутка». Именно таково обычное использование этого термина и преимущественно в связи с простыми временными отсчетами — для указания промежутка между двумя, как говорил Аристотель, «теперь».

Специальная теория относительности (СТО) усложнила понятие интервала, используя его для определения пространственно-временного аналога расстояния между двумя, как говорил Минковский, «мировыми точками», которые более кратко называются «событиями». Новизна глобального предложения Минковского состояла в том, чтобы 3-мерное пространство и 1-мерное время рассматривать как единое геометрически непрерывное многообразие — 4-мерный мир, или, если ограничиться одной пространственной координатой, то как 2-мерный («плоский») мир.

В чем, собственно, состояла новизна предложения Минковского? И раньше математики и физики, начиная с Эйлера, Лагранжа и Гамильтона, использовали совместно пространственные координаты и время как 4-ю переменную в описаниях разнообразных движений. Конечно, такие описания имели место и в работах Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна. Иначе было бы невозможно открыть и изучать инвариантные свойства электродинамических уравнений относительно преобразования Лоренца.

Да, описания 4-мира были, а также геометрические образы электромагнитных волн, электрона и др. в таком мире были, но... не было геометрического взгляда на этот мир. Именно этот заключительный шаг к единению пространства-времени сделал Минковский — он предложил инвариантность *квадрата интервала* считать определяющим свойством метрики СТО.

Ограничиваясь плоским 2-миром, идею Минковского можно выразить несколько иначе, используя аналогию с евклидовой плоскостью, на которой квадрат длины вектора произвольной точки $\mathbf{r} \equiv (x, y)' \equiv r(\cos\alpha, \sin\alpha)'$ можно определять на основе закона Пифагора — с помощью *суммы квадратов* координатных отрезков, образующих катеты координатного прямоугольника:

$$r^2 = x^2 + y^2 \equiv \mathbf{r}'\mathbf{r}, \tag{1}$$

здесь второе равенство (тождество означает «равно по определению») выделяет запись скалярного произведения векторов (или «строки на столбец»).

Главное отличие плоского мира Минковского от евклидовой плоскости состоит в том, что сумма квадратов заменяется *разностью квадратов*, т. е. для события, заданного вектором $\mathbf{h} \equiv (t, x)' \equiv h(\text{ch}\alpha, \text{sh}\alpha)'$, используется квадрат интервала:

$$h^2 = t^2 - x^2 \equiv -\mathbf{h}'\mathbf{F}\mathbf{h}, \tag{2}$$

здесь для векторной записи приходится вводить новую метрическую матрицу $\mathbf{F}$, которая является диагональной, $\mathbf{F} \equiv \text{diag}(-1, 1)$. Вообще говоря, в записи (1) тоже присутствует метрическая матрица $\mathbf{E} \equiv \text{diag}(1, 1)$, которая является матричной «единицей» и потому обычно не пишется, $\mathbf{Er} \equiv \mathbf{r}$.

Итак, научно-психологическая драма идей релятивизма, разыгравшаяся в начале 20 века, была вызвана сменой метрической парадигмы физического мировоззрения. Очень трудным оказалось обращение в новую квадратичную меру, как в веру.

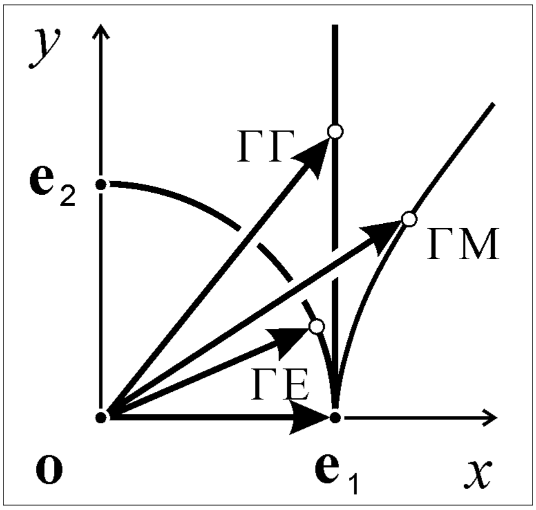


Рис. 9

Формальные алгебраические различия между метриками (1) и (2), как говорят и математики, и физики, тривиальны: если использовать графические образы метрических эталонов (рис. 9, эталоны: ГЕ — геометрия Евклида, ГГ — геометрия Галилея, ГМ — геометрия Минковского). Как видно из графиков эталонов, при переходе от евклидовой меры длины к мере Минковского следует круговой эталон заменить гиперболическим. Не тривиально здесь только то, что измерительные инструменты, обеспечивающие метрику сумм квадратов, хорошо известны всем, а инструменты, обеспечивающие метрику разностей квадратов — менее известны. Последние не были известны и основателям СТО.

Инструментальные средства, адекватные метрической концепции СТО, появились лишь в середине XX века — это средства радиолокационных измерений: расстояние до объекта измеряется посредством времени распространения импульсного сигнала — от источника до объекта и обратно. Когда физики осознали новую возможность не постулатной, а инструментальной трактовки релятивистских метрик, возникла проблема ревизии оснований СТО. В этой связи известный современный физик Г. Бонди даже объявил первичные эксперименты Майкельсона и Морли «тавтологией».

Сводится ли понимание различий между геометрией Евклида и хроногеометрией Минковского к пониманию различий между циркулем и локатором?

Первый шаг к пониманию природы различий метрик сумм и разностей квадратов требует более четкого уяснения характера различий форм метрических эталонов длины в этих случаях.

Физическое рисование окружности (1) с помощью циркуля наглядно воспроизводит то поворотное движение или преобразование, которое «преобразует» одну точку окружности в другую точку той же окружности, при этом вся окружность как целостный геометрический объект остается *инвариантной* относительно такого движения. Математическое описание кругового поворота на угол α вокруг начала координат требует использования понятия матрицы поворота

$$\mathbf{R} \equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \equiv \mathbf{R}(\alpha), \tag{3}$$

Чтобы воспроизвести аналогичное физическое рисование гиперболы, нам не хватает только соответствующего «гиперболического циркуля», т. е. гиперболографа. Конечно, нам не обязательно иметь механический гиперболограф, так как его совсем не трудно — без специфических механических работ — воспроизвести в компьютере, используя чисто программно-алгоритмические средства. При создании компьютерной версии гиперболографа нам придется вместо оператора (3) использовать оператор

$$\mathbf{H} \equiv \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\gamma & \mathrm{sh}\,\gamma \\ \mathrm{sh}\,\gamma & \mathrm{ch}\,\gamma \end{pmatrix} \equiv \mathbf{H}(\gamma), \tag{4}$$

т. е. оператор гиперболического поворота на гиперболический угол γ.

Только после того, как явным образом определились векторно-матричные участники нашей метрической игры, а самое главное — определился геометрический смысл игры с оператором преобразования, становится понятной и сама игра слов, выражаемая общим требованием *инвариантности* метрической квадратичной формы относительно действия оператора преобразования. Поняв эту игру слов на примере евклидовой геометрии, далее уже нетрудно понять и специфику геохронометрии Минковского.

Однако, чтобы понять физические различия между определениями (3) и (4), следует, как отмечалось выше, более детально вскрыть различия между «циркулем» и «локатором», т. е. надо более глубоко задуматься о кинематическом содержании хроногеометрии Минковского, в которой «угол» γ оси местного времени (рис. 10 справа) определяется скоростью v движения «инерциального наблюдателя». Связь формального гиперболического угла γ в гониометрическом описании базиса (4) со скоростью v инерциального движения устанавливается формулой: $\mathrm{th}\gamma \equiv v/c$, здесь c — скорость света. Если же особо не вникать в релятивистскую кинематику, то знания этой связи вполне достаточно, чтобы представить гиперболический поворот (4) в привычной для физиков кинематической форме, т. е. в виде хорошо известного преобразования Лоренца.

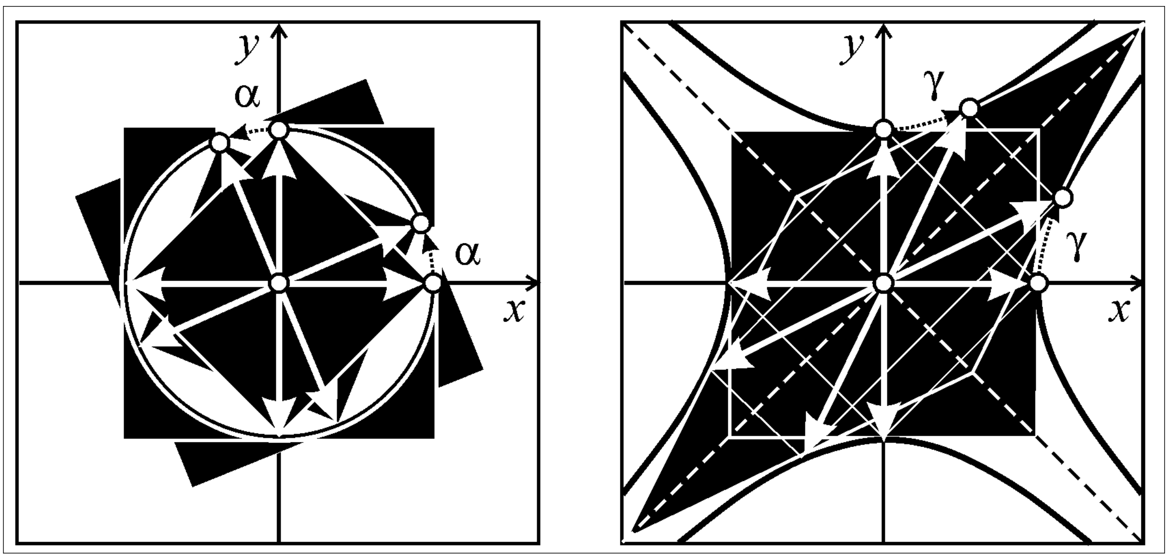


Рис. 10

Если все же вникать в кинематическое содержание хроногеометрии Минковского, то следует циркульные построения заменить «лучевыми процедурами» тестирования пространственно-временных событий, которые аналогичны локаторному методу, а также интерферометрическому методу исходного эксперимента Майкельсона и Морли.

7. Симметрии квадрата

Оригинальная версия хроногеометрии, провозглашенная Минковским в 1908 году, кроме фатального тезиса единства пространства-времени:

> «Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен сохранить самостоятельность»,

принесла физикам еще один сюрприз, скорее сюрреалистического толка (сродни картинам Сальваторе Дали, посвященным теме утекающего времени):

> чтобы «наглядно» подчеркнуть внутреннее гониометрическое родство геометрий «суммы квадратов» и «разности квадратов», Минковский предложил время считать «мнимым».

Этот технологический прием алгебраической природы способствовал бурному проникновению в физику «мнимых сущностей», развитых в разных формах, включая современные теории спиноров и т. д.

Выход из мистической мнимомизации физических сущностей, включая время, предложил еще Гамильтон. Выше я ограничился гауссовой геометрической интерпретацией комплексных чисел, теперь уделю внимание гамильтоновой. Собственно, Гамильтон предложил квадрат мнимой единицы, т. е. выражение $i^2 = -1$, интерпретировать геометрически как поворот на прямой угол. Из тригонометрической записи комплексных чисел такая связь вполне очевидна и как бы ничего нового для понимания «геометрии комплексных чисел» не дает.

Операторное содержание гамильтоновой идеи становится понятным только в контексте матричных представлений комплексных чисел.

От геометрических базисов, с которыми мы познакомились выше, вернемся еще раз к алгебраическим базисам. Ликвидируем мнимые «скалярные» единицы алгебраических базисов посредством введения следующих вещественных базисных матриц:

$$\mathbf{I} \equiv (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{J} \equiv (\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

Ничего интересного, на первый взгляд, эти матрицы не представляют, но с их помощью мы можем матрицы кругового и гиперболического поворотов записать так:

$$\mathbf{R} = \cos\alpha\mathbf{E} + \sin\alpha\mathbf{J}, \qquad \mathbf{H} = \mathrm{ch}\alpha\mathbf{E} + \mathrm{sh}\alpha\mathbf{I}.$$

Что напоминают нам эти формулы? Не трудно разглядеть в них уже описанные выше полярные формулы *комплексных чисел* (КЧ) и *двойных чисел* (ДЧ). Подтверждением правильности такого наблюдения служат свойства квадратов матриц **J** и **I**:

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{E}; \qquad \mathbf{I}^2 = \mathbf{E};$$

теперь понятно, что матрицы **R** и **H** являются вещественными *операторными* аналогами скалярных форм КЧ и ДЧ, соответственно, и **E** — аналог вещественной базисной единицы, **J** и **I** — аналоги мнимых единиц КЧ и ДЧ.

С другой стороны, следует обратить внимание на то, что матрицы **J** и **I**, а также участвовавшая в описаниях инвариантов геометрии Минковского матрица $\mathbf{F} \equiv \mathrm{diag}(-1, 1)$, определяют базовые симметрии квадрата (рис. 11). Поэтому возможна альтернативная трактовка алгебраических чисел, а также соответствующих им геометрий, — как объектов исчисления симметрий, а не «мнимостей».

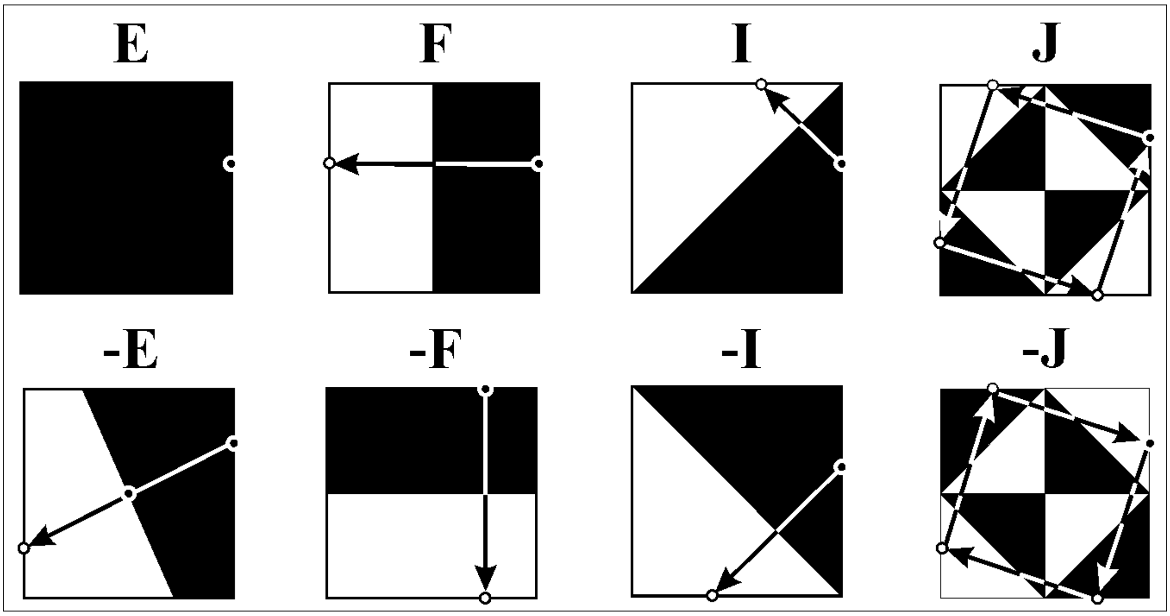


Рис. 11

Матричное представление симметрий квадрата — это диэдрическая группа рассмотренных базисных матриц:

$$D^4 \cong \{\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, -\mathbf{E}, -\mathbf{F}, -\mathbf{I}, -\mathbf{J} \mid \mathbf{F}^2 = \mathbf{I}^2 = -\mathbf{J}^2 = -\mathbf{FIJ} = \mathbf{E}\},$$

— после вертикальной черты, ограничивающей полный список элементов дискретной группы, перечислены определяющие условия группы. Уникальное свойство симметрий квадрата для алгебры состоит в том, что произвольную матрицу 2-го порядка **A** можно представить в диэдрическом базисе:

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{E} + a_2\mathbf{F} + a_3\mathbf{I} + a_4\mathbf{J},$$

Другие аналогичные базисы для произвольных матриц большего порядка, чем 2, можно построить методом прямых произведений, т. е. для матриц порядков степени двойки.

Таким образом, симметрии именно квадрата, а не какой-либо другой правильной фигуры (треугольника, пентагона и т. д.) являются уникальными, ибо они определяют естественные базисы основных математических объектов — алгебраических и геометрических. Поняв конструктивную уникальность симметрий квадрата, полезно изучить в сравнительном контексте конструктивные ресурсы симметрий и других фигур. Но эта чрезвычайно плодотворная тема, к сожалению выходит за рамки моего гимна.

8. Квадрат хаоса

Фантастическое, граничащее с хаосом, разнообразие новых геометрических форм подарил квадрат математикам и физикам XX века. Первопроходцами в это разнообразие были Гастон Жюлиа (1893–1978) и Пьер Фату (1878–1929). Жюлиа еще в 1918 году издал обширный математический мемуар об итерационных свойствах комплексного квадрата. Но математики более полувека не могли понять его выдающиеся абстрактные достижения. Оказалось, что те графические образы, которые неявно скрывались за «квадратными» итерациями, невозможно было даже вообразить, не увидев их явно.

Поговорка — лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать, лишний раз получила научное подтверждение. Только с развитием компьютерной графики наконец-то удалось визуализировать множества Жюлиа и только после этого стало приходить понимание прихода новой эры математики, именуемой «детерминированным хаосом», «нелинейной хаотической динамикой», «теорией фракталов»...

Игру с компьютерной визуализаций квадратных и других итераций начал в 1980 г. Бенуа Мандельброт, который до этого сотрудничал с фирмой IBM, в 70-е годы разрабатывал «фрактальную геометрию», а еще ранее, как позже вспоминал Бенуа: «Жюлиа был одним из моих учителей в Политехнической школе». Таким образом, именно Мандельброт осуществил связь времен и связь идей, реанимировав теорию, которая, как он сам отмечает, «пребывала в спячке».

Темы хаоса и фракталов находятся сегодня в эпицентре научного внимания и популярной литературы разных уровней простоты и сложности. Чтобы не сильно повторяться, я ограничусь ответом только на один вопрос: причем тут квадрат?

Простейший квадратичный итерационный процесс, один из которых исследовал Г. Жюлиа, аналитически записывается в виде следующей рекуррентной формулы:

$$z_{k+1} = c + z_k^2, \tag{1}$$

где $c \equiv a + b\mathrm{i}$ и $z \equiv x + y\mathrm{i}$ — *комплексные числа* (КЧ), т. е. здесь $\mathrm{i}^2 = -1$. При этом КЧ c и z_0 считаются заданными (определяющими) константами процесса последовательных итераций, когда натуральный номер итерации неограниченно растет, $k = 0, 1, 2, \ldots \infty$, а новые величины z_{k+1} вычисляются согласно (1): $z_1 = c + z_0^2$, $z_2 = c + (c + z_0^2)^2$ и т. д. Если числа z_{k+1} изображать точками комплексной плоскости $\mathbf{C} \equiv \{x, y\}$, соединяя смежные точки отрезками прямых линий, то мы получим итерационную последовательность точек — в виде кусочно-линейного трека. Задача состоит в том, чтобы оценить зависимость финальной точки трека z_∞ от начальных условий — от выбора начальной точки z_0 и постоянного смещения c, т. е. зависимость $z_\infty(z_0; c)$, которая в вещественном описании является функцией 4-х начальных переменных: $z_\infty(x_0, y_0; a, b)$.

Что сразу с очевидностью следует из итерационной формулы (1)?

Поскольку КЧ представимо в полярной форме: $z_k \equiv \rho_k(\cos\alpha_k + \mathrm{i}\sin\alpha_k)$, то возведение его в квадрат эквивалентно, во-первых, изменению расстояния точки от начала координат, $\rho_{k+1} = \rho_k^2$; во-вторых, повороту точки на удвоенный угол, $\alpha_{k+1} = 2\alpha_k$. Следует выяснить, как последовательные изменения расстояния точки, совмещенные с круговыми поворотами, сказываются на финальном поведении итерационного трека. Если в формуле (1) положить $c = 0$, т. е. исключить постоянные для каждого шага комплексные смещения, оставив только квадратичные радиальные изменения расстояний и повороты, то свойства трека становятся очевидными. Тогда все разнообразие финальных ситуаций описывается просто:

$$1^\circ)\ 0 \le \rho_0 < 1 \Rightarrow \rho_\infty = 0; \quad 2^\circ)\ \rho_0 > 1 \Rightarrow \rho_\infty = \infty; \quad 3^\circ)\ \rho_0 = 1 \Rightarrow \rho_\infty = 1. \tag{2}$$

Геометрическая трактовка этих трех ситуаций очевидна — окружность единичного радиуса разбивает плоскость на внутреннюю зону треков, сходящихся к началу координат, и внешнюю зону треков, расходящихся в бесконечность.

Границу зон сходящихся и расходящихся итерационных треков принято называть множеством Жюлиа $J^2 \cong \{z_\infty \mid z_0; c\}$. Частный случай $c \equiv 0$ представляет *базовое* множество Жюлиа $J_0^2 \cong \{z_\infty \mid z_0; 0\}$. Согласно (2), J_0^2 —окружность единичного радиуса.

Множество Мандельброта тоже определяется с помощью итерационных треков, но при дополнительном ограничении: все они исходят из начала координат, т. е. как множество $M^2 \cong \{z_\infty \mid 0; c\}$. Базовое множество Мандельброта $M_0^2 \cong \{z_\infty \mid 0; 0\}$, как нетрудно понять, содержит единственную точку $z_0 = z_\infty = 0$.

Теперь рассмотрим общий вопрос.

Какую форму имеют множества J^2 и M^2 в общем случае $c \neq 0$?

Оказывается, что на этот простой вопрос невозможно дать простой вразумительный ответ, допускающий аналитическое описание. Что же тогда делать? Конструктивный выход из данного аналитического затруднения пока известен единственный — следует алгоритмически построить множества J^2 и M^2, используя средства компьютерной визуализации. Выполняя такие построения убеждаемся в том (рис. 12), что для комплексных чисел и множество Мандельброта, и множества Жюлиа имеют очень сложные («фрактальные») формы. При этом форма множества Жюлиа сильно варьирует при разных выборах константы смещения c, которая на рис. 12 представлена выделенной точкой $\mathbf{c} \equiv (a, b)'$.

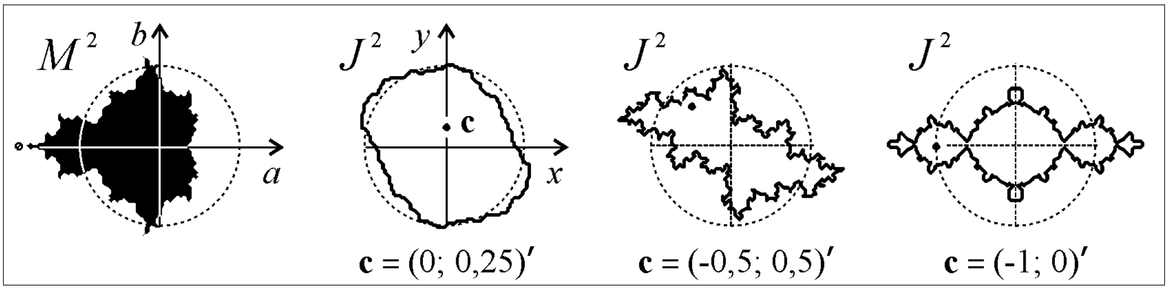


Рис. 12

Понятно, что, используя компьютерные средства, нетрудно, наряду с квадратными итерациями (1), изучить итерации произвольной степени $n \geq 2$:

$$z_{k+1} = c + z_k^n, \tag{3}$$

определяя аналогичным образом соответствующие множества J^n и M^n. Примеры, построенные для некоторых степеней $n = \{3, 4, 5, 6, 8\}$ (рис. 13), наглядно демонстрируют наличие глобальных дискретных симметрий множеств Мандельброта и Жюлиа, а также различия в порядках симметрий этих множеств.

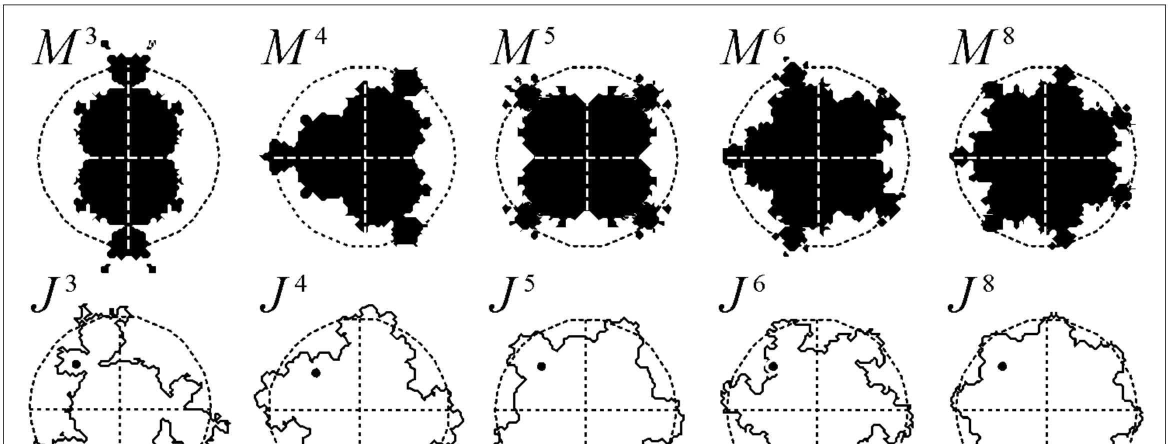


Рис. 13

Выше мне потребовалось *комплексные числа* (КЧ) определять как один из вариантов более общей числовой конструкции — биниона. Канонические формы бинионов, кроме КЧ, включают еще *двойные числа* (ДЧ) и *нильпотентные числа* (НЧ). Учитывая теперь это существенное обстоятельство, вполне уместно задаться вопросом:

Как выбор типа биниона влияет на форму множеств Мандельброта и Жюлиа?

Здесь я ограничусь только альтернативным примером выбора ДЧ. Оказывается, что множества J^2 и M^2, в случае выбора ДЧ, имеют простые прямоугольные формы. Самое важное здесь для общей темы — это то, что существует квадрат Мандельброта, а также существуют квадраты Жюлиа (рис. 14). Нетрудно убедиться, что базовое множество Жюлиа для ДЧ — это ромбовидный квадрат: $|x| + |y| = 1$.

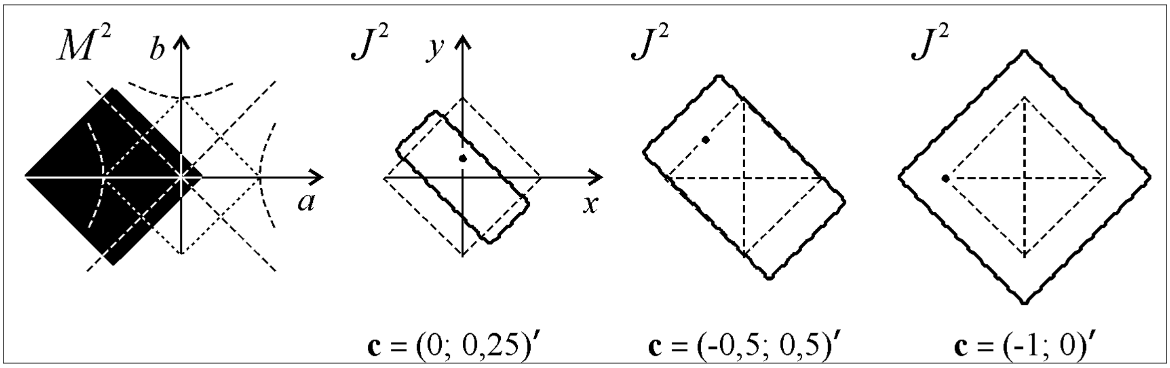


Рис. 14

На других, может быть более интересных, примерах я останавливаться не буду.

История познания и признания множеств Жюлиа и Мандельброта, как говорится, знаковая, ибо она символизирует уровень современного математического языка.

9. Квадрат — всегда квадрат

Из описанной выше исторической ретроспективы мы видим, что математические свойства «квадрата» остаются неисчерпанными. В сравнительном обсуждении этих свойств наш герой «квадрат» выступал в двух ипостасях: с одной стороны, как геометрический объект или фигура, а с другой — как алгебраическая операция или форма. Смешение «фигур и форм» противоречит исторической тенденции «отделения алгебры от геометрии» и в таком аспекте не представляется рационалистическим.

Для решения древней проблемы соизмеримости не хватало аналитических средств, и древние математики решали эту проблему посредством инструментальных построений. Теперь для описания множеств Жюлиа опять не хватает аналитических средств, и современные математики решают эту проблему тоже инструментальными построениями, используя в качестве нового универсального инструмента компьютер, который позволяет моделировать любой инструмент графоаналитических построений. Короче говоря, математика начиналась с «рисовательных» методов, имея в своем распоряжении простейшие инструменты (линейку и циркуль), и опять пришла к таким же рисовательным методам, но располагая существенно более совершенным инструментарием — компьютером. Как уже отмечалось выше, у каждого инструмента и метода имеются свои границы применимости, а у компьютера — это границы алгоритмической разрешимости вычислительных или проблемных задач. Такие задачи в математике уже выявляются, но они пока не представляются безнадежными. Самыми трудными для компьютерных технологий пока являются проблемы моделирования интеллекта и художественного творчества человека, но на успешное решение именно этих безнадежных проблем мы возлагаем самые большие надежды, потому что верим в творческую изобретательность человеческого духа.

Уже сейчас компьютер предоставляет живописцу богатые технические возможности для экспериментирования с формами, фактурами, цветом, а также в части композиционного дизайна. На очереди компьютерные воплощения тех художественных стилей, которые основаны на принципах пропорций, деформационных и других преобразованиях, включая фрактальные. В частности, мне представляется полезным создать компьютерную реализацию супрематических принципов К. Малевича. Выполненные недавно художником А. Ф. Панкиным графико-аналитические исследования композиционных правил супрематизма указывают путь для их компьютерной формализации (рис. 2 *б* — простейший пример этих исследований).

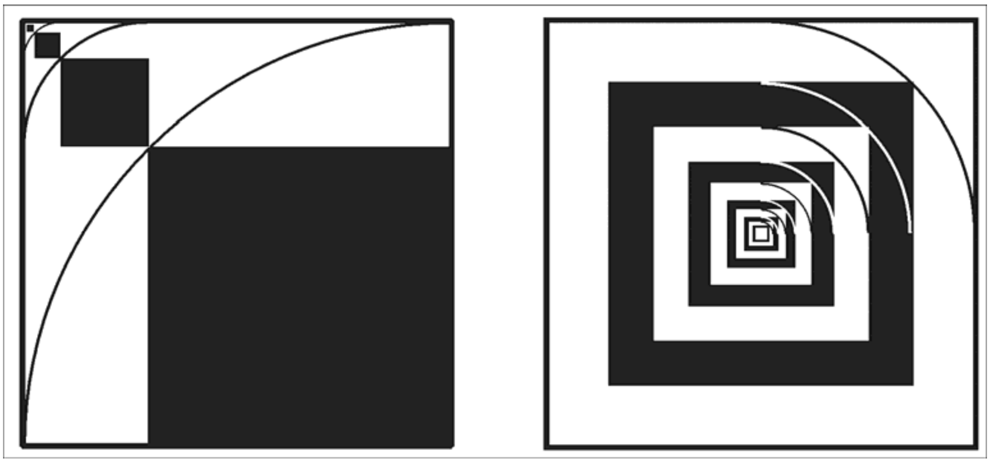


Рис. 15

Читатель, возможно, обратил внимание на то, что геометрический алгоритм бесконечной соизмеримости диагонали и стороны квадрата (см. рис. 3) можно интерпретировать как фрагмент квадрата Малевича. С целью подчеркивания этой связи я построил две фрактальные версии квадрата Малевича (рис. 15) — это заключительные «многоквадратные» многоточия моего гимна.

☺😐☹

Исходно я не собирался «Гимн» превращать в «Героическую симфонию». По мере же вживания в тему и вхождения в образ «квадрата» все труднее становилось остановить торжественное звучание разнообразных дополнительных квадратных тем. Тема квадрата многоаспектна. Её трудно исчерпать даже на имеющихся и хорошо известных фактах. Например, энергетические функции механики — это тоже квадратичные формы. За бортом остался «квадрат всемирного тяготения» Ньютона и т. д.

Мой публицистический замысел — убедить читателя, что именно квадраты «правят» и всем нашим физическим пространством, и еще всем миром! На этом патриотическом дифирамбе Природе, которая любит квадраты, а мы за эту простоту естественных нравов — Природу, я могу «закруглиться». Гимн Квадрату пропет.